

# Calcul différentiel.

## Identité d'Euler des fonctions homogènes.

Soient une fonction  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , différentiable en tout point, et  $k$  une constante réelle. Montrer que  $f$  est homogène de degré  $k$  (i.e.  $f(tx) = t^k f(x)$  pour tout  $t > 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ) ssi elle vérifie l'identité d'Euler

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

## Lemme de Morse à deux variables.

Soient  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^3$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  contenant l'origine. On suppose la forme quadratique hessienne  $D^2 f(0, 0)$  non-dégénérée.

1. Montrer qu'il existe trois fonction  $\alpha, \beta, \gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  telles que :

$$f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)x - \partial_y f(0, 0)y = \alpha(x, y)x^2 + 2\beta(x, y)xy + \gamma(x, y)y^2.$$

2. On suppose que  $D^2 f(0, 0)$  est de signature  $(+, -)$  et que  $\partial_{x,x}^2 f(0, 0)$  ou  $\partial_{y,y}^2 f(0, 0)$  sont non-nuls. Montrer qu'il existe deux fonctions  $u$  et  $v$  telles que :

$$f(x, y) - f(0, 0) - \partial_x f(0, 0)x - \partial_y f(0, 0)y = u(x, y)^2 + v(x, y)^2,$$

et que  $\varphi : ((x, y) \mapsto (u, v))$  soit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine.

3. Montrer que le résultat précédent reste valable si  $\partial_{x,x}^2 f(0, 0) = \partial_{y,y}^2 f(0, 0) = 0$ . Comment adapter ces résultats au cas des signatures  $(+, +)$  et  $(-, -)$  ?
4. On suppose que  $Df(0, 0) = 0$  et  $D^2 f(0, 0)$  de signature  $(+, -)$ . Montrer à l'aide de  $\varphi$  que la courbe de niveau d'équation  $f(x, y) = f(0, 0)$  admet un point double en l'origine, et que le couple des tangentes en ce point a pour équation  $\partial_{x,x}^2 f(0, 0)x^2 + 2\partial_{x,y}^2 f(0, 0)xy + \partial_{y,y}^2 f(0, 0)y^2 = 0$ .  
Exemple :  $f(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$ .

## Équation iconale.

Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , soit  $S$  une hypersurface définie paramétriquement par une application :

$$\varphi : t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \mapsto y = \varphi(t) \in S,$$

de classe  $\mathcal{C}^2$  sur un voisinage ouvert de l'origine dans  $\mathbb{R}^{n-1}$ . On note  $a = \varphi(0)$ . Soit  $N(t)$  un vecteur unitaire normal à  $S$  au point  $\varphi(t)$ , fonction  $\mathcal{C}^1$  de  $t$ .

1. Montrer que l'application  $F : ((t, u) \mapsto x = \varphi(t) + uN(t))$  est un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  sur un voisinage de  $a$  dans  $\mathbb{R}^n$ .
2. Interpréter géométriquement les applications  $x \mapsto u(x)$  et  $x \mapsto y(x) = \varphi(t(x)) \in S$  définies au voisinage de  $a$  par l'application réciproque  $F^{-1}$ . Montrer que cette fonction  $u$  est une solution de l'équation *iconale*  $\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 = 1$ .

## Dimension infinie.

Soient  $I = [0, 1]$ ,  $F$  l'espace des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $E$  le sous-espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , nulles en zéro. On munit  $F$  de la norme  $\|x\| = \sup_{t \in I} |x(t)|$  et de  $\|x\|_1 = \sup_{t \in I} |x'(t)|$ . Montrer que l'application  $f : E \rightarrow F$ , définie par  $f(x) = x' + x^2$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $E$ , et calculer sa différentielle en tout point.

## Calcul des variations.

Soient  $I = [a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  et  $E$  l'espace des fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , muni de la norme  $\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)| + \max_{x \in I} |f'(x)|$ . Une fonction  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , définit une fonctionnelle  $\mathcal{F}$  sur  $E$  par

$$\mathcal{F}(f) = \int_a^b \mathcal{L}(x, f(x), f'(x)) dx.$$

1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est une fonction différentiable sur  $E$  et que, pour toutes fonctions  $f, h \in E$ ,

$$D\mathcal{F}(f)h = \int_a^b (\partial_2 \mathcal{L}(x, f(x), f'(x))h(x) + \partial_3 \mathcal{L}(x, f(x), f'(x))h'(x)) dx.$$

2. On suppose que  $f \in E$  réalise le minimum de  $\mathcal{F}$  à extrémités fixes (les nombres  $\alpha$  et  $\beta$  étant donnés, on suppose que  $\mathcal{F}(f) \leq \mathcal{F}(g), \forall g \in E$  telle que  $g(a) = f(a) = \alpha$  et  $g(b) = f(b) = \beta$ ).

(a) Montrer que  $D\mathcal{F}(f)h = 0$  pour toute fonction  $h \in E$  telle que  $h(a) = h(b) = 0$ .

(b) Montrer que  $f$  vérifie l'équation différentielle d'Euler :

$$\frac{d}{dx}(\partial_3 \mathcal{L}(x, f(x), f'(x))) = \partial_2 \mathcal{L}(x, f(x), f'(x)), x \in I$$

(c) Étudier le cas où  $\mathcal{L}(x, f(x), f'(x)) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ .

## Redressement d'un champ de vecteurs.

Soit  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un voisinage ouvert  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $y = \varphi_t(x)$ , pour  $x$  donné dans  $U$ , une solution du système différentiel :

$$\frac{dy}{dt} = v(y), y(0) = x.$$

On admettra que  $(t, x) \rightarrow \varphi_t(x)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un voisinage de  $t = 0, x = 0$ . On veut montrer que, si  $v(0) \neq 0$ , il existe un changement de coordonnées local  $y = f(Y)$  au voisinage de 0, qui transforme le système différentiel en

$$\frac{dY}{dt} = V, Y(0) = X,$$

avec  $V = (1, 0, \dots, 0)$  et  $x = f(X)$ .

1. Traiter le cas où  $n = 1$ .
2. Pour  $n \geq 2$ , vérifier que l'on peut prendre pour  $f$  l'application  $f(t, x_2, \dots, x_n) = \varphi_t(0, x_2, \dots, x_n)$ , si on suppose  $v_1(0) \neq 0$ .
3. Redresser le champ  $v(y_1, y_2) = (y_1, y_2)$  au voisinage du point  $(1, 0)$ .