

Suites de fonctions.

Exercice 1^a

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $(f_n)_{n \geq 1}$ la suite des fonctions numériques définies sur \mathbb{R}_+ par :

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}.$$

1. Montrez que (f_n) converge simplement vers 0 sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrez que la convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$.
3. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R} ?

Exercice 3^b

Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions numériques croissantes sur l'intervalle de \mathbb{R} $I = [a, b]$. On suppose que cette suite converge simplement vers f , fonction continue sur I .

1. Montrez que la convergence de (f_n) vers f est uniforme.
Etant donné ε , on cherchera une subdivision $(a_i)_{0 \leq i \leq N}$ de $[a, b]$ telle que $\forall x, x' \in [a_i, a_{i+1}]$, on a $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.
2. Montrez que ce résultat peut tomber en défaut
 - si I n'est pas borné,
 - si f n'est pas supposée continue.

Exercice 4^b

Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \neq 0$, $|f(x)| < |x|$.

On pose :

$$\begin{aligned} f_1 &= f \\ f_{n+1} &= f \circ f_n = f_n \circ f \end{aligned}$$

Montrez que (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[-a, a]$.

On pourra raisonner par l'absurde.

Exercice 2^a

Soit f une fonction numérique continue sur \mathbb{R}_+ telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, f non constamment nulle.

Soient $(f_n)_{n \geq 1}$ et $(g_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$f_n(x) = f(nx), \quad g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. Montrez que (f_n) et (g_n) convergent simplement vers 0 sur \mathbb{R}_+ , mais non-uniformément.
2. Montrez que $(f_n g_n)$ converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R}_+ .

Intégrales.

Exercice 3^abis

Trouvez une relation de récurrence permettant le calcul des intégrales :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

Calculez I_1 puis I_3 .

Exercice 15^b

Soient E un espace de Banach, $[a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} et f une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R} telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. On suppose que $\forall t \in]a, b[, f$ admet une dérivée à droite en t vérifiant $\|f'_d(t)\| \leq k = \text{cste}$.

Etablir l'inégalité :

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq k \frac{(b-a)^2}{4} \quad (1)$$

2. On suppose $E = \mathbb{R}$. Pour quel f a-t-on égalité dans (1) ?
3. Si $E = \mathbb{R}$ et si f est dérivable sur $]a, b[, f$ non constamment nulle, montrez que $\exists c, d \in]a, b[$ tels que :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \frac{(b-a)^2}{4} |f'(c)| \quad (2)$$

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| < \frac{(b-a)^2}{4} |f'(d)| \quad (3)$$

$$(4)$$

Exercice W

1. Justifiez l'existence de $G = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2} dt$.
2. Grâce à l'inégalité : $e^u \geq 1 + u$, montrez que :

$$\underbrace{\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt}_{=I_1} \leq \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2} dt \leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt}_{=I_2}.$$

3. En posant $t = \sin(u)\sqrt{n}$ et $t = \tan(u)\sqrt{n}$, exprimez I_1 et I_2 en fonction de $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(u) du$.
4. Montrez que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, puis que $nW_n W_{n-1} = \pi/2$ et que W_n est décroissante.
5. En déduire l'inégalité :

$$\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \leq W_{n-1} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2(n-1)}},$$

puis la valeur de G .