

Équations différentielles linéaires.

Théorème de Sturm.

1. On considère l'équation $y''(t) + b(t)y'(t) + c(t) = f(t)$ où b est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur I , c et f étant continues sur I . Montrer qu'on peut se ramener à étudier une équation du type : $z''(t) + p(t)z(t) = q(t)$ où p et q sont continues sur I .
On étudie désormais les zéros de z dans le cas où $q = 0$.
2. Soit f une solution de l'équation $(E_p) : z''(t) + p(t)z(t) = 0$. Si il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$, montrer que f est la fonction nulle.
Montrer que les zéros de f sont en nombre fini dans tout segment inclus dans I .
3. Soient deux solutions f , non-nulle, et g de (E_p) . Si il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = g(t_0) = 0$, établir que g est proportionnelle à f .
4. Soient deux solutions indépendantes f et g de l'équation (E_p) . En étudiant $W = f'g - fg'$, montrer qu'entre deux zéros de g existe un zéro de f .
5. Soient des solutions f et g de (E_p) et (E_q) où $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues telles que $q < p$. En étudiant W , montrer qu'entre deux zéros de g existe un zéro de f .
Application : On suppose $I = [t_0, +\infty[$. Si il existe $\omega > 0$ tel que $p > \omega^2$, montrer que toute solution f de (E_p) s'annule une infinité de fois sur I .

Équilibre des systèmes linéaires à coefficients constants.

On considère une matrice inversible $A \in GL_2(\mathbb{C})$ et le système différentiel $(\mathcal{S}) : X' = AX$.

1. Quels sont les équilibres possibles de ce système différentiel autonome ?
2. On suppose qu'il existe une valeur propre λ de partie réelle strictement positive. Montrer qu'il existe une solution X de (\mathcal{S}) telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| = +\infty$.
3. On suppose qu'il existe une valeur propre λ de partie réelle nulle. Montrer qu'il existe une solution X de (\mathcal{S}) telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\| \neq 0$.
4. On suppose que les valeurs propres λ, μ de A sont de parties réelles < 0 . Calculer $\exp(tA)$ et montrer que 0 est asymptotiquement stable ssi $\forall \lambda \in \text{Sp}(A), \text{Re}(\lambda) < 0$.

Équation de Bessel.

Déterminer les solutions sur \mathbb{R} de l'équation suivante, où $n \in \mathbb{N} : ty'' + 2y' - ty = 0$.

1. Déterminer les solutions de l'équation développables en série entière.
2. Déterminer les solutions de l'équations sur \mathbb{R}_+^* , \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R} puis conclure.

Lemme de Gronwall.

Soient un réel $k \geq 0$ et deux fonctions continues $u, v : J = [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$. Établir l'implication suivante :

$$\forall t \in J, u(t) \leq v(t) + k \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \Rightarrow \forall t \in J, u(t) \leq v(t) + k \int_{t_0}^t e^{k(t-\tau)} v(\tau) d\tau.$$

Application : Montrer que si φ et ψ sont deux solutions de $y' = f(t, y)$ définies sur J et égales en $t_0 \in J$, elles sont égales sur J .