

Intégrales sur un intervalle quelconque.

Exercice 1^a

Calculer l'intégrale suivante après avoir établi sa convergence :

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos(x) \ln(\tan x) dx.$$

Exercice 1^{a bis}

Prouver que $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f : \left(x \mapsto e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Donner un équivalent de $\int_n^\infty f(t) dt$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2^b

Soient a un réel et f une application uniformément continue de l'intervalle $[a, +\infty[$ dans \mathbb{R} telle que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

soit convergente.

1. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(\sin x) dx$ est divergente.
3. Montrer que la fonction $(x \mapsto \sin(x^2))$ n'est pas uniformément continue.

Exercice 3^b

Soit f une fonction numérique localement intégrable sur \mathbb{R}_+^* et soient a, b deux réels strictement positifs.

1. On suppose qu'il existe deux réels λ, μ tels que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lambda \tag{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \mu. \tag{2}$$

Montrer que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

est convergente et que $I = (\lambda - \mu) \ln(b/a)$.

2. Montrer que les résultats obtenus subsistent si la condition (2) est remplacée par la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{f(x) - \mu}{x} dx$.
3. Etablir la convergence des intégrales suivantes et déterminer leurs valeurs :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx ; I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$$
$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(2x) - \text{Arctan}(x)}{x} dx ; I_4 = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx.$$

Exercice J^b

1. Pour tout entier naturel n , montrer que l'intégrale

$$I_n = \int_{-1}^1 t^n \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$$

est convergente. Calculer cette intégrale.

2. Montrer que l'application qui à tout couple (P, Q) de polynômes associe l'intégrale

$$\int_{-1}^1 P(t)Q(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt$$

est un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

3. En déduire qu'il existe une suite (P_n) et une seule de polynômes unitaires telle que, pour tout entier naturel n , $d^\circ(P_n) = n$ et que, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels distincts,

$$\int_{-1}^1 P_n(t)P_p(t) \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} dt = 0.$$

Calculer P_0 , P_1 et P_2 .

Exercice K^a

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \exp(x^2) \int_x^\infty \exp(-t^2) dt$. Vérifier que f est bien définie puis établir que $\forall x \geq 0$, $0 < 2xf(x) < 1$. Donner un équivalent de f en $+\infty$.
2. Former une équation différentielle vérifiée par f , déterminer le sens de variation de f puis tracer sa courbe représentative.
3. Soit $F : x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2) dt$. Donner un développement asymptotique de F comprenant trois termes.

Exercice K'^a

Donner un développement asymptotique de $F : x \mapsto \int_1^x e^{-t} \ln(t) dt$ comprenant trois termes en 0 et en $+\infty$.