Algèbre linéaire.

Supplémentaire commun.

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer qu'on ne peut pas avoir $E = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_N$ si les V_i sont des sous-espaces vectoriels stricts de E.
   Que se passe-t-il si $\mathbb{K}$ est fini ?
2. Montrer que si $F_1, F_2, \ldots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E de même dimension, il existe un supplémentaire commun G à tous les F_i.
   On pourra introduire l'ensemble $\mathcal{G} = \{G; \forall i \in \{1, \ldots, p\}, F_i \cap G = \{0\}\}$.

Famille libre d'applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $f_1, \ldots, f_n$ des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. Montrer que la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ si il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $M_n(x_1, \ldots, x_n) = (f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ soit inversible.

Dual de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $f_A : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{Tr}(AX) \in \mathbb{K}$. Montrer que $f : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto f_A$ établit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son dual.
2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $f(XY) = f(YX)$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$.
3. Montrer que, $\forall n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

Matrices monotones.

On dit qu'une matrice à coefficients réels A est *positive*, et on note $A \geq 0$, si tous ses coefficients sont positifs.
On dit que A est *monotone* si elle est inversible et si $A^{-1} \geq 0$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \geq 0$ si et seulement si pour tout vecteur X, $X \geq 0 \Rightarrow AX \geq 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est monotone ssi pour tout vecteur X, $AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$.
3. Soient $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la matrice :

$$\begin{pmatrix} 2+c_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2+c_2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2+c_n \end{pmatrix}$$

   est monotone.
4. Déterminer les matrices qui sont à la fois positives et monotones.

Décomposition LU d'une matrice tridiagonale.

Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $(b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $(c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ définie par :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} = a_i; \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, a_{i,i+1} = b_i; \forall i \in \{2, \dots, n\}, a_{i,i-1} = c_i$$

et $a_{i,j} = 0$ sinon. On pose aussi $A_k = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le k}$ et $\delta_k = \det A_k$.

1. Etablir une relation de récurrence sur es δ_k.
2. On suppose que tous les δ_k sont non-nuls. Etablir l'existence d'une décomposition de A sous la forme LU, où L est une matrice triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et seulement la première sous-diagonale non-nulle, et U triangulaire supérieure, avec sur la diagonale les coefficients $(\delta_1, \delta_2/\delta_1, \dots, \delta_n/\delta_{n-1})$, sur la sur-diagonale $(b_1, \dots, b_{n-1})$ et des 0 partout ailleurs.
3. Déterminer les déterminants δ_k et la décomposition LU quand elle existe, dans le cas où $a_{ii} = 2b$ et $b_i = c_i = -1$.

Inversion de la matrice de Hilbert et déterminant de Cauchy.

1. Soient $(a_1, \dots, a_n)$, $(b_1, \dots, b_n)$, et $(c_1, \dots, c_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que les a_i sont deux à deux distincts, de même que les b_j. On suppose de plus que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout i, j.
   Résoudre le système : $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i + b_j} = c_j$.
   On considèrera la fraction rationnelle $F(X) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i + X}$
2. Soit $H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que H est inversible et que H^{-1} est à coefficients entiers.
3. Calculer $\det \left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)$.