

Réduction des endomorphismes et des matrices.

Diagonalisation simultanée.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable.
2. Soit $A \subset \mathcal{L}(E)$ formée d'endomorphismes diagonalisables commutant deux à deux. Montrer que les éléments de A admettent une base commune de diagonalisation.

Endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ stabilisant le groupe linéaire.

Soit φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, alors $\varphi(M) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Donner des exemples de tels endomorphismes.
2. Montrer que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \varphi(M) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
On montrera que $\text{rg}(M) < n \Rightarrow \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, P - \lambda M \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$.
3. Montrer que $\text{rg}(\varphi(M)) \geq \text{rg}(M)$.
On montrera que $\text{rg}(M) = r \Rightarrow \exists Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $Q - \lambda M$ n'est pas dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ pour r valeurs de λ exactement.
4. Montrer que φ conserve le rang.

Un théorème de Burnside.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Tr}(A^k) = 0$. Montrer que A est nilpotente.
2. Soit G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, soit $(M_i)_{1 \leq i \leq m} \in G^m$ une base de $\text{Vect}G$ et f telle que :

$$f : \begin{pmatrix} G & \rightarrow & \mathbb{C}^m \\ A & \mapsto & (\text{Tr}(AM_i))_{1 \leq i \leq m} \end{pmatrix}$$

Montrer que si $f(A) = f(B)$, alors $AB^{-1} - I$ est nilpotente.

3. On suppose que toutes les matrices de G sont diagonalisables. Montrer que f est injective.
4. On dit qu'un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est *d'exposant fini* si $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall A \in G, A^N = I$.
Montrer qu'un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini est fini.

Endomorphismes cycliques.

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. On définit :

$$I = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(u) = 0\} \text{ et } I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(u)(x) = 0\}.$$

1. Montrer l'existence de polynômes unitaires non-nuls μ et μ_x tels que $I = \mu\mathbb{K}[X]$ et $I_x = \mu_x\mathbb{K}[X]$. Montrer que μ_x divise μ .
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mu_x = \mu$.
3. On dit que u est *cyclique* s'il existe $x \in E$ tel que $E = \text{Vect}(u^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$. Montrer l'équivalence :

$$u \text{ est cyclique} \Leftrightarrow \mu = \chi_u.$$

Dimension du commutant.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose A diagonalisable et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A et n_1, \dots, n_r leurs multiplicités respectives. On note $\mathcal{C}(A)$ le commutant de A et $\mathbb{K}(A) = \{P(A), P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Calculer les dimensions de $\mathcal{C}(A)$ et de $\mathbb{K}(A)$.
2. Montrer les équivalences :

$$\dim \mathcal{C}(A) = n \Leftrightarrow \dim \mathbb{K}[A] = n \Leftrightarrow r = n \Leftrightarrow \mathcal{C}(A) = \mathbb{K}[A].$$

3. On ne suppose plus A diagonalisable. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\mathbb{K}[A] = \mathcal{C}(A)$.

Lemme d'Hadamard, disques de Gershgorin.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ pour tout i .

1. On suppose que pour tout i , $|a_{ii}| > R_i$. Montrer que A est inversible.
2. Montrer que $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_i \{z \in \mathbb{C}; |z - a_{ii}| \leq R_i\}$.
3. On suppose de nouveau que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, $|a_{ii}| > R_i$. Montrer que

$$|\det A| \geq \prod_i (|a_{ii}| - R_i).$$

4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour tout i , $a_{ii} > R_i$. Montrer que :

$$\det A \geq \prod_i (a_{ii} - R_i).$$

5. En déduire un résultat de localisation des racines d'un polynôme quelconque après avoir écrit le résultat obtenu avec les matrices compagnon.