

## Topologie.

### Théorème du point fixe dans un compact.

On considère un espace métrique compact  $K$  et une application  $f : K \rightarrow K$  vérifiant pour tout couple  $(x, y)$  d'éléments distincts de  $K$  l'inégalité :  $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ .

1. Montrer que  $f$  a un point fixe  $L$  et vérifier que celui-ci est unique.  
*On pourra étudier la fonction  $\varphi : x \rightarrow d(x, f(x))$  définie de  $K$  dans  $\mathbb{R}$ .*
2. On considère un élément  $x_0 \in K$  et on forme la suite définie par  $x_{n+1} = f(x_n)$ .  
Montrer que la suite  $n \rightarrow d(x_n, L)$  est convergente.  
Montrer qu'il existe une suite  $x_{\varphi(n)}$  extraite de  $(x_n)$  qui converge vers un élément  $a \in K$ . Montrer que  $a = L$  puis que  $\lim(x_n) = L$ .

### Théorème de Baire.

On considère un espace métrique complet  $(E, d)$  et on veut établir le théorème de Baire : *l'intersection d'une suite  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'ouverts denses dans  $E$  est dense dans  $E$ .*

1. Soit  $B(a, r)$  une boule incluse dans  $E$ . Etablir l'existence d'une suite de boules  $(B_n)$  vérifiant les conditions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \overline{B_n} \subset O_n \cap B(a, r), B_{n+1} \subset B_n, \lim B_n = 0.$$

Etudier la convergence d'une suite  $x_n$  telle que  $x_n \in B_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Conclure.

2. Montrer la forme équivalente suivante du théorème de Baire : *la réunion d'une suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*
3. En déduire qu'un e.v.n. à base infinie dénombrable n'est jamais complet.

### Théorème de Banach-Steinhaus.

On considère un espace de Banach  $(E, \|\cdot\|)$  et un e.v.n.  $(F, \|\cdot\|)$ . Soit une suite simplement convergente d'applications linéaires continues  $f_n : E \rightarrow F$ .

1. Justifier  $\forall x \in E$  l'existence de  $M(x) = \sup\{\|f_n(x)\|, n \in \mathbb{N}\}$ . Prouver que,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , l'ensemble  $O_k = \{x \in E, M(x) > k\}$  est ouvert.
2. Etablir à l'aide du théorème de Baire l'existence d'un nombre entier  $K$  pour lequel le complémentaire de  $O_K$  est d'intérieur non-vide.
3. A l'aide d'une boule  $B(a, r)$  incluse dans  $(O_K)^C$ , établir que  $\{\|f_n\|, n \in \mathbb{N}\}$  est majoré. En déduire que  $f = \lim f_n$  est linéaire et continue.

### Adhérence d'un sous-espace d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ .

1. Montrer, si  $F$  est un sous-espace de  $E$ , que  $\overline{F}$  est un sous-espace de  $E$ .
2. Montrer en particulier qu'un hyperplan  $H$  est tel que  $\overline{H} = H$  ou  $\overline{H} = E$ .

### Ensemble $\mathcal{A}$ des valeurs d'adhérence d'une suite $(x_n)$ .

Pour tout entier naturel  $p$ , on pose  $F_p = \overline{\{x_k/k \geq p\}}$ .

1. Montrer que toute valeur d'adhérence  $L$  de  $(x_n)$  appartient aux fermés  $F_p$ .
2. Réciproquement, si  $L \in \bigcap_{p=0}^{+\infty} F_p$ , démontrer que  $L$  est valeur d'adhérence de  $(x_n)$ .  
Exprimer  $\mathcal{A}$  en fonction des  $F_p$ .

## Définition de Borel-Lebesgue des espaces métriques compacts.

On dit qu'un espace métrique  $(E, d)$  vérifie (B-L) si : *Pour toute famille  $(O_i)_{i \in I}$  d'ouverts recouvrant  $E$  il existe une partie finie  $J$  de  $I$  telle que  $(O_i)_{i \in J}$  recouvre  $E$ .*

1. Si  $E$  est compact, montrer que pour toute famille  $(O_i)_{i \in I}$  d'ouverts recouvrant  $E$ , il existe  $r > 0$  tel que :  $\forall x \in E, \exists i \in I / B(x, r) \subset O_i$ .  
Puis que :  $\forall r > 0$ , un nombre fini de boules de rayon  $r$  suffit à recouvrir  $E$ .  
En déduire qu'un espace métrique  $E$  vérifie la propriété (B-L).
2. Si  $E$  vérifie (B-L), si  $(x_n)$  désigne une suite de  $E$ , montrer que toute intersection finie des fermés  $F_n = \overline{\{x_k / k \geq n\}}$  est non-vide et  $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ .  
Puis que la suite  $(x_n)$  a une valeur d'adhérence dans  $E$  et que l'espace métrique  $E$  est compact.