

Algèbre bilinéaire réelle.

Projection orthogonale dans un espace préhilbertien réel.

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sev de E .

1. On note, pour tout $x \in E$, $F_x = \{y \in F; \|x - y\| = d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|\}$.
Montrer que $y \in F_x \Leftrightarrow x - y \in F^\perp$, puis que F_x a au plus un élément.
2. On suppose de plus que F est complet. Montrer que $\forall x \in E$, F_x a exactement un élément, que l'on notera x_F .
Montrer que l'application ($x \mapsto x_F$) s'identifie à la projection orthogonale sur F .
Montrer que $F = F^{\perp\perp}$.
3. On prend $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$. Que représente F ? Conclure.

Matrices de Gram.

Soit E un espace préhilbertien réel et x_1, \dots, x_n , n vecteurs de E . On note $M_G(x_1, \dots, x_n) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de Gram et $G(x_1, \dots, x_n)$ son déterminant.

1. Montrer que toute matrice de Gram est symétrique positive et que toute matrice symétrique positive est une matrice de Gram.
2. Montrer que $M_G(x_1, \dots, x_n)$ est définie si et seulement si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.
3. Soit V un sous-espace de E muni d'une base (e_1, \dots, e_n) (pas forcément ortho-normale) et $x \in E$. Montrer que la distance d de x à V vérifie :

$$d^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}.$$

4. On suppose que E est de dimension d et qu'il existe $d + 1$ vecteurs u_1, \dots, u_{d+1} de E de norme 1 et vérifiant :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1, \text{ tel que } \forall i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = \alpha.$$

Déterminer α .

Montrer qu'il existe effectivement de tels vecteurs dans E .

Produit de Schur de deux matrices.

Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques. On définit le produit de Schur de A et B comme étant $A \circ B = (a_{i,j}b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Si A et B sont positives, montrer que $A \circ B$ est positive.
2. Si de plus A et B sont définies, montrer que $A \circ B$ est définie.
3. Si A est positive, montrer que $E = (e^{a_{i,j}})_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive, et qu'elle est définie si A est définie.

Endomorphisme de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$.

On définit, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi_A : M \in \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tAMA.$$

Montrer que $|\det \varphi_A| = |\det A|^{n+1}$.