

Algèbre bilinéaire réelle.

Projection orthogonale dans un espace préhilbertien réel.

Soit E un espace préhilbertien réel, F un sev de E .

1. On note, pour tout $x \in E$, $F_x = \{y \in F; \|x - y\| = d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|\}$.
Montrer que $y \in F_x \Leftrightarrow x - y \in F^\perp$, puis que F_x a au plus un élément.
2. On suppose de plus que F est complet. Montrer que $\forall x \in E$, F_x a exactement un élément, que l'on notera x_F .
Montrer que l'application $(x \mapsto x_F)$ s'identifie à la projection orthogonale sur F .
Montrer que $F = F^{\perp\perp}$.
3. On prend $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$. Que représente F ? Conclure.

Représentation des formes linéaires.

Soit H un espace de Hilbert.

1. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel fermé de H , alors $F = H \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$.
2. Soit f une forme linéaire continue sur H . Montrer qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall x \in H, f(x) = (u|x)$.
3. Etudier l'application $(f \mapsto u)$.

Endomorphisme de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$.

On définit, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de $\text{Sym}_n(\mathbb{R})$:

$$\varphi_A : M \in \text{Sym}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tAMA.$$

Montrer que $|\det \varphi_A| = |\det A|^{n+1}$.

Compacité faible de la boule unité de $l_2(\mathbb{R})$.

Soit $l_2(\mathbb{R}) = \{x = (x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \sum_{\mathbb{N}} x_k^2 < \infty\}$ muni du produit scalaire $(x|y) = \sum_{\mathbb{N}} x_k y_k$.
Si $(x^{(n)}) \in l_2(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $l_2(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une sous-suite $(x^{\varphi(n)})$ et un élément $a \in l_2(\mathbb{R})$ tel que $\forall z \in E, (x^{\varphi(n)}|z) \rightarrow (a|z)$.

Théorème de Maschke.

Soient E un \mathbb{C} -ev de dimension finie $n \geq 1$, G un sous-groupe fini de $GL(E)$ et F un sev de E stable par tous les éléments de G .

Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G .

Quotients de Rayleigh.

Pour tout $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$, définie positive, on pose $r_A(x) = \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2}$, pour $x \neq 0$.

1. Montrer que $r_A(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = r_A(\mathbb{S}(0, 1))$.
2. Soient λ, μ les valeurs propres maximales et minimales de A . Montrer que $r_A(\mathbb{S}(0, 1)) = [\mu, \lambda]$.

Exercice.

Soit $A \in \mathcal{S}ym_n(\mathbb{R})$, définie positive telle que $\forall i \neq j, a_{i,j} < 0$. Montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,i} > 0$ et $\text{rg}(A) \in \{n-1, n\}$.

Calcul de valeurs propres.

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, symétrique, de valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

1. Montrer que $\lambda_k = \sup_{F \text{ sev tel que } \dim F = k} (\inf_{x \in F \cap S} (u(x)|x))$.
2. Déterminer $\inf_{F \text{ sev tel que } \dim F = k} (\sup_{x \in F \cap S} (u(x)|x))$.
3. Soient A un evn, $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E , $\varphi : (t \in A \mapsto u_t \in \mathcal{S}(E))$ une application continue.
Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $t \in A$, on note $\lambda_k(t)$ la kème plus grande valeur propre de u_t . Montrer que $\psi : (t \in A \mapsto \lambda_k(t) \in \mathbb{R})$ est continue.

Quadrique.

Discuter, suivant $(a, b, c) \in (\mathbb{R}^*)^3$, la nature de la quadrique :

$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1.$$

Montrer que la surface définie par cette équation est de révolution si et seulement si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.