

Curriculum Vitæ,  
Activités d'enseignement et de recherche

Magali LÉCUREUX-MERCIER

**Table des matières**

<b>1 Curriculum Vitæ</b>	<b>2</b>
<b>2 Activités d'enseignement</b>	<b>3</b>
<b>3 Activités de recherche</b>	<b>4</b>
3.1 Publications et Prépublications . . . . .	5
3.2 Séminaires et colloques . . . . .	5
3.3 Détails des travaux de recherche . . . . .	8
<b>4 Projet de recherche</b>	<b>14</b>
4.1 Dynamique des fluides . . . . .	14
4.2 Modélisation du trafic (routier et piéton) . . . . .	16
<b>Références</b>	<b>19</b>

# 1 Curriculum Vitæ

Nom marital : LÉCUREUX  
Nom patronymique : MERCIER  
Prénom : Magali

Née le 07/11/1982 à Reims

Nationalité : Française  
Adresse : 22 rue Archangé, 91400 Orsay  
Tél. : +33 (0)6 86 91 79 59  
E-Mail : magali.lecureux-mercier@univ-orleans.fr  
Web : <http://math.univ-lyon1.fr/~mercier/>

## Formation

- 2010–2011 **Attachée Temporaire de Recherche** à temps partiel (demi-ATER) à l'université d'Orléans .
- Déc. 2009 **Soutenance de thèse** devant le jury composé de Sylvie Benzoni-Gavage, Rinaldo M. Colombo, Francis Filbet, Barbara Keyfitz, Olivier Lafitte, Régis Monneau, Denis Serre (Rapporteurs : Thierry Goudon et Olivier Lafitte).
- 2007–2010 **Allocation couplée** (allocataire à l'UCBL – monitrice à l'ÉNS Lyon).
- 2006–2009 **Thèse**, sous la direction de Sylvie Benzoni-Gavage à l'Université Claude Bernard Lyon 1 (UCBL) : *Étude de différents aspects des EDP hyperboliques : Persistance d'onde de choc dans la dynamique des fluides compressibles, Modélisation du trafic routier, Stabilité des lois de conservation scalaires.*
- Avril–Oct. 2008 **Séjour « pré-doc »** à Brescia, avec Rinaldo M. Colombo.
- Mars–Juil. 2005 **Stage de Master 2 Recherche** sous la direction de Sylvie Benzoni, Université Lyon 1 : *Équations d'Euler à symétrie sphérique, focalisation d'ondes de choc dans les fluides réels.*
- 2005–2006 **Agrégation de Mathématiques**, option B; **Master 2 Recherche** (mention mathématiques et applications), à l'ÉNS Lyon, *Mention Très Bien.*
- 2004–2005 **Master 1 de Mathématiques** (parcours approfondi) à l'ÉNS Lyon, *Mention Très Bien.*
- Mai–Juin 2004 **Stage de fin de licence** sous la direction de J.-M. Roquejoffre, Université Toulouse III : *Stabilité d'ondes progressives d'un modèle de transition de phase.*
- 2003–2004 **L3 (Licence de Mathématiques)** à l'ÉNS Lyon, *Mention Bien.*
- 2003 Admission à l'ÉNS Lyon.
- 2002–2003 **MP\*** au Lycée G. Clemenceau, Reims.

## Langues

Anglais (écrit et parlé) ; Italien (parlé) ; Allemand (notions).

## Informatique

Connaissance de Matlab, Scilab, Maple, Latex, html.

## Divers

Participation à l'encadrement de la fête de la science (stand de mathématiques) en 2009 ; Participation au projet MathαLyon (reproduction des manipulations de l'exposition *Pourquoi les Mathématiques ?* pour les scolaires) en 2010.

## 2 Activités d'enseignement

### ATER

Pour l'année **2010–2011**, je suis attachée temporaire de recherche à temps partiel à l'université d'Orléans.

- Introduction au raisonnement mathématique : chargée d'un cours-TD d'analyse en L1, premier semestre (58h).
- Soutien en L1, premier semestre (14h).
- Chargée de TD en L3 à l'école d'ingénieur Polytech'Orléans : Analyse vectorielle (8h), Analyse complexe (8h).

### Monitorat

Dans le cadre d'un monitorat de l'ENS Lyon, j'ai effectué des heures d'enseignements en Licence de mathématiques et en préparation à l'agrégation :

#### **2009–2010 :**

- Responsable TD en L3 : initiation à l'analyse numérique (responsable du cours : Emmanuel Grenier).
- Préparation à l'agrégation, option B : cours, TP scilab, textes blancs.

#### **2008–2009 :**

- Responsable TD en L3 : initiation à l'analyse numérique (responsable du cours : Emmanuel Grenier).
- Préparation à l'agrégation, option B : cours, textes blancs.
- Préparation à l'agrégation (leçons Algèbre–Analyse) : oraux blancs.

#### **2008–2009 :**

- Responsable TD en L3 : initiation à l'analyse numérique (responsable du cours : Emmanuel Grenier).
- Préparation à l'agrégation, option B : cours, textes blancs.

J'ai également suivi les stages de formation CIES :

- Pédagogie de l'enseignement supérieur (3 jours).
- Création de pages web (3 jours).
- Gérer son stress en situation d'enseignement (3 jours).
- Présentation au collège d'Ambérieu de l'exposition MathαLyon (reproduction des manipulations de l'exposition *Pourquoi les Mathématiques ?* pour les scolaires) (3 jours).

### Autres

J'ai de plus donné des colles en classes préparatoires en **2006–2007**, en MP\*, au lycée du Parc, à Lyon.

### 3 Activités de recherche

**Mots-clefs :** Systèmes d'EDP hyperboliques, lois de conservation, dynamique des fluides compressibles, temps d'existence, stabilité, modélisation du trafic routier/piéton, flux non-local, couplage d'EDP à une interface.

**Résumé :** Au cours de ma thèse et de mon année d'ATER, je me suis intéressée d'une part au temps d'existence des *solutions régulières et régulières par morceaux de la dynamique des fluides compressibles*. J'ai démontré une extension d'un théorème de M. Grassin [23] à des gaz de Van der Waals. Ce résultat, décrit dans la première partie de ma thèse, fait l'objet d'un article accepté pour publication [31]. J'ai ensuite étudié les solutions ondes de chocs : j'ai poursuivi d'une part l'approche de T. T. Li [32] pour estimer leur temps d'existence dans le cas isentropique à symétrie sphérique, et d'autre part l'approche de Whitham [37] afin d'obtenir une équation approchée vérifiée par la surface de discontinuité. Ces résultats sont décrits dans ma thèse et font l'objet d'un article en préparation.

D'autre part, motivée par la *modélisation d'un rond-point en trafic routier*, j'ai étudié une extension multi-classe du modèle macroscopique de Lighthill–Whitham–Richards sur une route infinie avec des jonctions. Pour ce nouveau modèle, les véhicules sont différenciés selon leur origine et leur destination, et des conditions aux bord adaptées au niveau des jonctions sont introduites. J'ai montré dans l'article publié [34] l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Riemann pour ce modèle. Des simulations numériques indiquent que les solutions obtenues existeraient en temps long. J'ai de plus abordé le problème de Cauchy par la méthode de front tracking, comme décrit dans ma thèse.

Enfin, suite à une collaboration avec Rinaldo M. Colombo lors d'un séjour « pré-doc » de six mois à Brescia (Italie), je me suis intéressée aux *lois de conservation scalaires multi-dimensionnelles avec terme source*. La première question abordée fut la stabilité dans  $L^1$  des solutions entropiques par rapport aux conditions initiales, au flux et à la source. Les résultats obtenus sont décrits dans la note publiée [15] et sont prouvés de manière détaillée dans l'article publié [14], obtenus en collaboration avec R. Colombo et M. Rosini. J'ai par la suite amélioré ces estimations, ce qui a fait l'objet d'un article soumis [28].

En collaboration avec Rinaldo M. Colombo et Michael Herty, j'ai ensuite étudié des équations avec *flux non-local*. De telles équations apparaissent par exemple dans un modèle de chaîne de montage et dans un modèle de trafic piéton. Une fois établi le caractère bien posé de ce type d'équations non-locales, nous avons montré dans l'article publié [12] la différentiabilité au sens de Gâteaux du semi-groupe obtenu par rapport aux conditions initiales, ce qui permet de caractériser les maxima et minima de fonctionnelles de coût sur la solution.

En prolongement de cette étude, avec Rinaldo M. Colombo, nous nous sommes intéressés au couplage d'une loi de conservation scalaire à une EDO, ce qui peut modéliser en particulier l'interaction d'un groupe avec un leader ou un prédateur. Ce travail a fait l'objet d'un article soumis [13]. Nous nous sommes également intéressés, avec Rinaldo M. Colombo et Mauro Garavello à la modélisation des foules : nous avons étudié une loi de conservation dans laquelle la direction prise par les piétons est la somme d'une direction préférée et d'un terme d'inconfort dû la présence d'autres personnes, ce qui modélise le fait que les piétons cherchent à éviter les zones de fortes densités. Cela a fait l'objet d'une note soumise [11] et d'un article en préparation.

La section 3.3 développe les détails de ces travaux de recherche.

### 3.1 Publications et Prépublications

#### a) Publications

- [A1] Magali Mercier, Traffic flow modelling with junctions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 350(1) : 369–383, 2009.
- [A2] Rinaldo M. Colombo, Magali Mercier et Massimiliano D. Rosini, Stability and Total Variation Estimates on General Scalar Balance Laws, *Commun. Math. Sci.*, 7(1) : 37–65, 2009.
- [A3] Rinaldo M. Colombo, Michael Herty et Magali Mercier, Control of the continuity equation with a non-local flow, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2010.
- [A4] Magali Lécureux-Mercier, Global smooth solutions of Euler equations for Van der Waals gases, *SIAM Journal on Mathematical Analysis (SIMA)*, 2011.

#### b) Prépublications

- [P1] Rinaldo M. Colombo et Magali Lécureux-Mercier, An Analytical Framework to Describe the Interactions Between Individuals and a Continuum, soumis.
- [P2] Magali Lécureux-Mercier, Improved stability estimates on general scalar balance laws, soumis.

#### c) Divers

- [D1] Rinaldo M. Colombo, Magali Mercier et Massimiliano D. Rosini, Stability Estimates on General Scalar Balance Laws, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 347 : 45–48, 2009.
- [D2] Magali Lécureux-Mercier, Stability of scalar balance laws and Scalar non-local conservation laws, Proceedings de la conférence *Intensive Research Month on Hyperbolic Conservation Laws and Fluid Dynamics in Parma*, 2010.
- [D3] Magali Lécureux-Mercier,  $L^1$  Stability for scalar balance laws; Application to pedestrian traffic, Proceedings de la conférence *HYP 2010*, à Beijing, 2010.
- [D4] Rinaldo M. Colombo, Mauro Garavello et Magali Lécureux-Mercier, Non-local Crowd dynamics, soumis comme compte-rendu.

### 3.2 Séminaires et colloques

#### a) Exposés donnés dans des conférences

- Jun 2010 HYP 2010 (Beijing),  $L^1$  Stability for scalar balance laws; Application to pedestrian traffic. Objet du proceeding [29].
- Fev. 2010 Intensive Research Month on Hyperbolic Conservation Laws and Fluid Dynamics (Parme – Italie), *Stability of scalar balance laws and Scalar non-local conservation laws*. Objet du proceeding [30].
- Mars 2009 *Stabilité  $L^1$  pour des lois d'équilibre scalaires; Application à l'étude d'une équation de trafic piéton*, Session de Printemps du GdR Moad (Grenoble).
- Juil. 2008 Sixth meeting on Hyperbolic Conservation Laws (L'Aquila – Italie), *Traffic Flow Modelling with Junctions from a Multiclass Point of View*.
- Mai 2008 Conservation Laws and Applications (Brescia – Italie), *Traffic Flow Modelling with Junctions from a Multiclass Point of View*.

## b) Exposés donnés dans des séminaires

- Mars 2011 Séminaire de modélisation mathématique, mécanique et numérique (Caen), *Lois de conservation scalaires à flux non-local*.
- Fév. 2011 Séminaire de Mathématiques Appliquées (Clermont-Ferrand), *Stabilité  $L^1$  des lois de conservation scalaires. Lois de conservation scalaires avec flux non-local*.
- Janv. 2011 Séminaire Fluides compressibles (Paris VI), *Stabilité  $L^1$  des lois de conservation scalaires. Applications au trafic piéton et aux interactions groupe/agent isolé*.
- Déc. 2010 Laboratoire MAPMO (Orléans), *Stabilité  $L^1$  pour des lois d'équilibre scalaires; Applications au trafic piéton et aux interactions groupe/agent isolé*.
- Nov. 2010 Laboratoire Jean Leray (Nantes), *Stabilité  $L^1$  pour des lois d'équilibre scalaires; Lois de conservation scalaires avec flux non-local*.
- Avril 2010 Séminaire d'EDP (Besançon), *Persistance d'ondes de choc dans la dynamique des fluides compressibles*.
- Fev. 2010 Groupe de travail Trafic (Toulouse), *Stabilité  $L^1$  pour des lois d'équilibre scalaires; Application à l'étude d'une équation de trafic piéton*.
- Fev. 2010 Groupe de travail de mécanique des fluides (Toulouse), *Persistance d'ondes dans les fluides compressibles*.
- Nov. 2009 Séminaire du Laboratoire Jean Kuntzmann (Grenoble), *Persistance d'ondes dans les fluides compressibles*.
- Nov. 2009 Séminaire des doctorants (Lyon), *Temps d'existence de solutions dans la dynamique des fluides compressibles isentropiques 1D*.
- Oct. 2008 Séminaire des doctorants (Lyon), *Estimations  $BV$  et stabilité des lois de conservation scalaires généralisées*.
- Déc. 2007 Séminaire des doctorants (Lyon), *Problèmes de Riemann pour des équations de trafic routier*.

## c) Poster

- Jan. 2010 Conférence sur le Contrôle des EDP (projet de GDRE CONEDP) (Luminy), *Control of the continuity equation with a non-local flow*.

## d) Colloques auxquels j'ai participé sans donner d'exposé

- Mars 2011 Journées Dynamo (Dynamique Non-Linéaire, Asymptotique, Modélisation), *Lyon*.
- Juin 2010 Journées EDP, *Port d'Albret*.
- Mars 2010 Journées Dynamo (Dynamique Non-Linéaire, Asymptotique, Modélisation), *Rennes*.
- Nov. 2009 JERAA (Journées EDP Rhône-Alpes-Auvergne), *Grenoble*.
- Sept. 2009 Session d'été du GdR MOAD, *Fréjus*.
- Juin 2009 Modelling and Optimisation of Flows on Networks, *Cetraro (Italie)*.
- Nov. 2008 JERAA (Journées EDP Rhône-Alpes) 2008, *Clermont-Ferrand*.
- Oct. 2007 Conférence : Mathematical Models of Traffic Flow, *CIRM, Marseille*.
- Août 2007 Session d'été du GdR MOAD (MOdélisation, Asymptotique Dynamique non-linéaire), *Albi*.
- Mars 2007 École d'hiver : Travelling Waves, Theory and Applications, organisée par B. Sandstede, *University of Surrey (UK)*.

- Mars 2007 Session d'été du GdR MOAD (MODélisation, Asymptotique Dynamique non-linéaire), *Lille*.
- Janv. 2007 Mini-cours : Dissipativity, par D. Serre, *Trieste (Italie)*.
- Août 2006 École d'été : Ecole thématique du GdR CHANT (équations Cinétiques et Hyperboliques : Aspects Numériques, Théoriques, et de modélisation), *Roscoff*.
- Oct. 2006 Session d'automne du GdR MOAD (MODélisation, Asymptotique Dynamique non-linéaire ) : Challenges actuels en mécanique des fluides, *CIRM, Marseille*.
- Juil. 2006 HYP 2006 (Eleventh International Conference on Hyperbolic Problems Theory, Numerics, Applications) (organisation), *Lyon*.
- Eté 2005 École d'été : Dynamique des équations aux dérivées partielles non linéaires, *Institut Fourier, Grenoble*.

### 3.3 Détails des travaux de recherche

Au cours de ma thèse et de mon année d'ATER, j'ai étudié différentes EDP hyperboliques : équations d'Euler compressibles, trafic routier multi-classe ou encore lois de conservation scalaires. Les problématiques et techniques rencontrées diffèrent notablement selon le nombre d'équations du système et le nombre de variables d'espace.

Du point de vue de l'analyse abstraite, des problèmes généraux communs se dégagent cependant. Principalement, les questions abordées concernent : *l'existence et l'unicité de solutions* ou encore *l'estimation du temps d'existence*. D'autres thématiques sont cependant également traitées : le comportement asymptotique des solutions ayant un long temps d'existence, leur stabilité (si les conditions initiales sont perturbées, la solution reste-elle proche d'une solution connue ?) et enfin la contrôlabilité (comment trouver des conditions initiales minimisant une fonctionnelle donnée ?).

Je me suis de plus intéressée à des problèmes pratiques : modélisation et simulation d'un rond-point, modélisation d'une foule, qui ont des applications directes à des problèmes sociétaux actuels. J'ai pu ainsi prendre contact avec L. Leclercq de l'INRETS de Lyon, pour déterminer si le modèle proposé de trafic routier pouvait être comparé aux données expérimentales.

#### a) Dynamique des fluides compressibles

Le but est ici d'étudier le temps d'existence des solutions classiques et des solutions faibles de type « onde de choc » pour des fluides réels. Par *fluide réel*, on entend un gaz ne suivant pas nécessairement la loi des gaz parfaits. Les équations d'Euler pour les fluides compressibles représentent l'évolution du mouvement d'un gaz, dont l'état thermodynamique est entièrement décrit d'un point de vue macroscopique par sa densité de masse  $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  ; sa quantité de mouvement  $q = \rho u$ , où  $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  est sa vitesse ; son énergie totale par unité de volume  $E = \frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e$ , où  $e$  est l'énergie interne par unité de masse, aussi appelée *énergie spécifique*. Ces grandeurs sont alors soumises aux équations suivantes [3, chap. 13] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0 & \text{loi de conservation de la masse,} \\ \partial_t q + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p = 0 & \text{loi de conservation de la quantité} \\ & \text{de mouvement,} \\ \partial_t E + \operatorname{div}((E + p) u) = 0 & \text{loi de conservation de l'énergie,} \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $p$  est la pression déterminée par une loi d'état  $p = p(\rho, e)$  supposée connue. On se donne de plus des données initiales, au temps  $t = 0$  et l'on étudie le problème de Cauchy associé à ce système. Ce système a historiquement motivé le développement de la théorie des systèmes de lois de conservation non-linéaires. L'étude concerne les solutions *régulières par morceaux* de ce système. On sait déjà qu'il existe une solution régulière locale en temps lorsque les données initiales sont régulières (cf. [3]) ; on ne sait en revanche pas grand chose sur la persistance de ces solutions. Plus précisément, il existe des données initiales particulières pour lesquelles les solutions régulières sont globales en temps, mais il existe aussi des familles de données initiales pour lesquelles on sait qu'il y aura « explosion » en temps fini. C'est ce qui conduit à considérer des solutions *ondes de choc*, cas particuliers de solutions faibles, régulières de part et d'autre d'une surface de discontinuité, le choc. Il existe de nombreux résultats concernant le prolongement des solutions régulières, obtenus le plus souvent dans le cadre de gaz parfaits polytropiques, c'est-à-dire. lorsque  $p(\rho, e) = (\gamma_0 - 1)\rho e$ .

Dans ce cadre que j'ai tout d'abord adapté un théorème de M. Grassin, donnant l'existence globale de solutions régulières pour un gaz parfait, au cas des gaz de Van der Waals,

ce qui fait l'objet de l'article accepté pour publication [31].

**Théorème 3.1.** *Soit  $m > 1 + d/2$ . Soient  $(\rho_0, u_0, s_0)$  les conditions initiales pour le problème de Cauchy associé au système d'équations (1) pour un gaz de Van der Waals polytropique tel que  $\gamma_0 > 0$ . On suppose que  $0 \leq \rho_0 \leq 1/b$  et*

$$(H1) \quad \|(\pi_0, s_0)\|_{\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon, \text{ où } \pi_0 = \left(\frac{\rho_0}{1-b\rho_0}\right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}} \exp\left(\frac{s_0}{c_v}\right);$$

$$(H2) \quad u_0 \in X = \{z : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; Dz \in \mathbf{L}^\infty, D^2 z \in \mathbf{H}^{m-1}\},$$

$$(H3) \quad \text{Il existe } \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^d, \text{ dist}(\text{Spec}(Du_0)(x), \mathbb{R}_-) \geq \delta,$$

$$(H4) \quad \rho_0 \text{ et } s_0 \text{ ont un support compact,}$$

$$(H5) \quad \text{le coefficient } \gamma_0 \text{ vérifie } \gamma_0 = \frac{\nu+1}{\nu-1} \text{ avec } \nu \in \mathbb{N} \text{ et } \nu \geq 2, \text{ ou bien } \nu \in \mathbb{R} \text{ et } \nu \geq m > 1 + \frac{d}{2}.$$

Soit  $\bar{u}$  la solution de  $\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = 0$ ,  $\bar{u}(0, x) = u_0(x)$ . Il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que, si  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  alors il existe une solution  $(\rho, u, s)$  globale régulière au problème de Cauchy pour (1) satisfaisant

$$\left(\left(\frac{\rho}{1-b\rho}\right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}}, u - \bar{u}, s\right) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}^{m-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{d+2})).$$

D'autre part, j'ai prolongé les résultats de Li Ta Tsien [32], afin d'estimer le temps d'existence de solutions ondes de choc à symétrie sphérique en juxtaposant deux solutions régulières le long d'une ligne de discontinuité. On introduit dans ce cas les invariants de Riemann  $w_1 = u - H$  et  $w_2 = u + H$ , où  $H(\rho) = \int^\rho \frac{c(y)}{y} dy$  (où  $c(\rho)$  est la vitesse du son qui s'exprime dans le cas isentropique seulement en fonction de la densité).

**Théorème 3.2.** *On suppose que les conditions de compatibilité ainsi que les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites en  $r = R_0$ . Si  $w_1 \geq 0$  sur  $\mathcal{K}$  et  $0 \leq w_2 - w_1 \leq 2 \left(\frac{3-\gamma_0}{b(\gamma_0-1)}\right)^{\frac{\gamma_0-1}{2}}$  sur  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{K}$  et si de plus  $-\partial_r w_2 \geq C$  et  $|\partial_r w_2| \leq r$  le long de  $\mathcal{C}_1$ , alors le problème angulaire pour un gaz de Van der Waals admet une solution locale en temps et, avec les notations précédentes, le temps d'existence est minoré de la manière suivante :*

$$T_{\text{ex}} \geq R_0 C (\|w^-\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}}),$$

où  $C(\|w^-\|_{\mathbf{W}^{1,\infty}})$  ne dépend pas de  $R_0$ .

Je cherche désormais à mieux estimer le temps d'existence des solutions ondes de choc à symétrie sphérique obtenues en suivant la méthode de Li Ta Tsien [32], ce qui fait l'objet d'un article en préparation. En particulier, j'aimerais maintenant considérer un 1-choc, ce qui crée des problèmes lors de l'interaction avec l'origine, puisque les termes sources de nature géométrique sont singuliers à cet endroit.

Enfin, en procédant par approximation (méthode de Whitham), j'ai obtenu une équation satisfaite par la surface de discontinuité. Cette équation est de type mixte et hyperbolique dans le cas qui nous intéresse. Il faut désormais s'intéresser au temps d'existence des solutions de cette équation.

## b) Trafic routier

J'ai étudié dans cette partie une nouvelle modélisation d'écoulement de trafic routier le long d'une route avec jonction, dans la perspective de modéliser la circulation sur un (grand) rond-point. Pour ce nouveau modèle, une jonction sur une route infinie unidimensionnelle est vue comme un point de discontinuité avec des conditions aux bord particulières. Ces conditions aux bords sont inspirées par les conditions classiques de Bardos-Leroux-Nédélec [2] et tiennent compte de divers facteurs tels que les priorités données aux

véhicules et la taille des routes de sortie et d'entrée. Le trafic sur ces routes secondaires n'est pas étudié. Cependant, leur taille intervient dans le modèle par l'intermédiaire des conditions aux bords.

J'ai commencé par étudier ce modèle avec une seule jonction, placée sans perte de généralité en  $x = 0$ . J'ai alors étudié l'évolution des densités de véhicules  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $\rho_3$ , la première étant la densité de véhicules restant sur la route allant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , la seconde la densité de véhicules venant de  $-\infty$  et tournant au niveau de la discontinuité et la troisième la densité de véhicules entrant au niveau de la discontinuité et allant vers  $+\infty$ . J'ai supposé ici que le comportement des véhicules est modélisé par une loi de vitesse  $\rho \mapsto v(\rho)$  indépendamment de leur origine et de leur destination. Ceci conduit aux lois de conservation :

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \partial_x (\rho_1 v(\rho_1 + \rho_2)) = 0 \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x (\rho_2 v(\rho_1 + \rho_2)) = 0 \end{cases} \text{ si } x < 0, \quad \begin{cases} \partial_t \rho_1 + \partial_x (\rho_1 v(\rho_1 + \rho_3)) = 0 \\ \partial_t \rho_3 + \partial_x (\rho_3 v(\rho_1 + \rho_3)) = 0 \end{cases} \text{ si } x > 0, \quad (2)$$

avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \rho_1(0, x) &= \rho_{1,0}(x) && \text{pour } x \in \mathbb{R}, \\ \rho_2(0, x) &= \rho_{2,0}(x) && \text{pour } x < 0, \\ \rho_3(0, x) &= \rho_{3,0}(x) && \text{pour } x > 0, \end{aligned} \quad (3)$$

et les conditions aux bords :

$$\begin{aligned} \rho_1 v(\rho_1 + \rho_2)(t, 0-) &= \rho_1 v(\rho_1 + \rho_3)(t, 0+) && \text{max}, \\ \rho_2 v(\rho_1 + \rho_2)(t, 0-) &\leq o(t) && \text{max}, \\ \rho_3 v(\rho_1 + \rho_3)(t, 0+) &\leq i(t) && \text{max}, \end{aligned} \quad (4)$$

où max signifie que les conditions aux bords réalisent le maximum des différents flux. Il faut ici ajouter de plus une loi de priorité permettant de décider dans quel ordre les flux seront maximisés. Puisqu'on vise à modéliser un rond-point, on donne la priorité aux véhicules arrivant de  $-\infty$ . On maximise donc d'abord les flux de  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , puis le flux de  $\rho_3$ .

J'ai résolu le problème de Riemann pour ce nouveau modèle avec un ou plusieurs points de jonctions, c'est-à-dire que j'ai considéré des conditions initiales  $\rho_{0,i}$  et des conditions aux bords  $o(t)$  et  $i(t)$  constantes. Avec un point de jonction j'ai obtenu que le problème de Riemann admet une unique solution entropique globale en temps, mais dans le cas de plusieurs jonctions ou d'une infinité dénombrable de jonctions qui ne s'accumulent pas, j'ai obtenu l'existence locale en temps d'une unique solution entropique, avec une borne inférieure pour le temps d'existence.

**Théorème 3.3.** *On considère une route possédant un nombre dénombrable de jonctions, situées en les points  $(x_i)_{i \in I}$  qui ne s'accumulent pas. Sous les hypothèses*

(V) *tous les véhicules ont la même loi de vitesse  $v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ , qui est  $\mathcal{C}^{0,1}$ , décroissante, s'annulant en  $r = 1$  ;*

(F) *le flux  $q : [r \mapsto rv(r)]$  est strictement concave et atteint son maximum  $q_c$  en  $r = r_c \in ]0, 1[$  ;*

(P) *on connaît les proportions  $p_{i,j}$  de véhicules entrant en  $x_i$  et sortant en  $x_j$  ;*

*il existe un temps  $T > 0$  tel que le problème de Riemann pour le problème de route avec jonctions en les  $(x_i)_{i \in I}$  tel qu'en chaque jonction on ait (2)–(3), avec des conditions aux bords comme décrites en (4), admet une unique solution faible entropique pour tout  $t \in [0, T]$ .*

*De plus, on peut donner une borne inférieure sur le temps d'existence : soit  $L = \min_k \{x_{k+1} - x_k\} > 0$ , alors  $T \geq \frac{L}{2V}$ .*

Ces résultats sont présentés dans l'article publié [34].

J'ai testé numériquement ce modèle, en utilisant le schéma de Godunov avec conditions aux limites « transparentes » en utilisant le logiciel Matlab. Les résultats obtenus semblent indiquer que la solution au problème de Cauchy existe pour des temps longs et que la variation totale décroît. Du point de vue théorique, la méthode de *front tracking* a montré que le problème de Cauchy était bien posé pour des données initiales bien choisies. Il reste désormais à traiter le cas général.

### c) Lois de conservation scalaires

Dans une troisième partie, effectuée en collaboration avec Rinaldo M. Colombo au cours d'un stage de six mois à Brescia, j'ai étudié des lois d'équilibre scalaires de la forme

$$\begin{aligned} \partial_t u + \operatorname{div} f(t, x, u) &= F(t, x, u), & t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0, x) &= u_0(x) \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (5)$$

**Stabilité des lois de conservation scalaires.** En collaboration avec Rinaldo M. Colombo et Massimiliano D. Rosini, j'ai entrepris de généraliser un résultat de stabilité dans  $\mathbf{L}^1$  par rapport aux conditions initiales, en s'intéressant désormais à la dépendance par rapport au flux  $f$  et par rapport à la source  $F$ . Plus précisément, si  $v$  est la solution du problème

$$\begin{aligned} \partial_t v + \operatorname{div} g(t, x, v) &= G(t, x, v), & t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}^N, \\ v(0, x) &= v_0(x) \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}). \end{aligned} \quad (6)$$

notre objectif est d'estimer  $\|(u - v)(t)\|_{\mathbf{L}^1}$  en fonction de  $\|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1}$  et de  $f - g, F - G$ .

Des résultats similaires avaient été obtenus [5, 33] dans le cas particulier sans source ( $F = 0$ ), le flux ne dépendant que de  $u$ . Dans le cas général, il a tout d'abord fallu obtenir une estimation de la variation totale de la solution  $u$  de (5) en se donnant de bonnes hypothèses sur le flux  $f$  et la source  $F$ . Pour cela, nous avons utilisé la méthode de doublement des variables due à Kruřkov. Une fois cette estimation obtenue, en réutilisant la méthode de doublement des variables, nous avons démontré le résultat souhaité.

**Théorème 3.4.** *Soient  $(f, F), (g, G)$  deux couples flux-source satisfaisant des hypothèses adaptées (voir [14]). Soit  $T > 0$ ,  $\Omega = [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$  et*

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= NW_N \left( (2N + 1) \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})} \right), \\ \kappa &= 2N \|\nabla \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{N \times N})} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R})}, \\ M &= \|\partial_u g\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Soit  $u$  la solution de Kruřkov de (5) et  $v$  la solution de Kruřkov de (6). Alors, pour tout  $R > 0$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ , l'estimation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \int_{\|x-x_0\| \leq R} |u(T, x) - v(T, x)| dx \leq e^{\kappa T} \int_{\|x-x_0\| \leq R+MT} |u_0(x) - v_0(x)| dx \\ & + \frac{e^{\kappa_0 T} - e^{\kappa T}}{\kappa_0 - \kappa} \operatorname{TV}(u_0) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & + NW_N \left( \int_0^T \frac{e^{\kappa_0(T-t)} - e^{\kappa(T-t)}}{\kappa_0 - \kappa} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt \right) \|\partial_u(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ & + \int_0^T e^{\kappa(T-t)} \int_{\|x-x_0\| \leq R+M(T-t)} \|((F - G) - \operatorname{div}(f - g))(t, x, \cdot)\|_{\mathbf{L}^\infty} dx dt. \end{aligned}$$

L'estimation obtenue a de plus pu être utilisée pour étudier un modèle simplifié d'évolution d'un gaz radiatif possédant une source non-locale sous forme de produit de convolution :

$$\partial_t u + \text{Div} f(t, x, u) = -u + K *_x u.$$

Une fois connues les estimations de dépendance par rapport au flux et à la source, l'existence et l'unicité d'une solution faible entropique pour ce problème non classique s'obtiennent par une méthode de point fixe. Ces résultats sont décrits dans la note [15] et les preuves sont détaillées dans l'article publié [14].

Cette estimation, bien que satisfaisante, n'était cependant pas très facile d'utilisation puisque les hypothèses requièrent en particulier  $f \in \mathcal{C}^2$ ,  $F \in \mathcal{C}^1$  ainsi que des estimations sur les dérivées temporelles. De plus, on n'y retrouve pas exactement le même coefficient que celui donné par Kruřkov [26] dans son théorème de dépendance aux conditions initiales. C'est pourquoi j'ai repris ces estimations pour éliminer certaines hypothèses inutiles et améliorer les coefficients. Ce travail a fait l'objet d'un article soumis [28].

**Contrôle de l'équation de continuité.** En collaboration avec Rinaldo M. Colombo et Michael Herty, j'ai utilisé l'estimation de la dépendance par rapport au flux et à la source obtenue dans l'article [14] pour l'étude de l'équation de continuité avec flux non-local (apparaissant par exemple dans un modèle de trafic piéton 2D pour un phénomène de ruée ou modèle d'une chaîne de montage) :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho V(\rho)) = 0, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), \end{cases} \quad (7)$$

où  $V$  est une fonction vitesse *non-locale*, par exemple, si  $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est une fonction donnée et  $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  un moyau de convolution, on peut considérer  $V(\rho) = v(\rho * \eta)$  ou encore  $V(\rho) = v(\int_{\mathbb{R}^N} \rho(t, x) dx)$ . Le théorème de point fixe de Banach permet d'obtenir existence et unicité d'une solution faible entropique pour ce problème.

**Théorème 3.5.** *Pour tous  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $\beta > \alpha$ , il existe un temps  $T(\alpha, \beta) > 0$  tel que pour tout  $\rho_0 \in \mathcal{X}_\alpha = (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$ , le problème (7) admet une unique solution faible entropique  $\rho \in \mathcal{C}^0([0, T(\alpha, \beta)]; \mathcal{X}_\beta)$ .*

On obtient un théorème similaire pour le problème linéarisé

$$\begin{cases} \partial_t r + \text{div}(rV(\rho) + \rho DV(\rho)(r)) = 0, \\ r(0, x) = r_0(x), \end{cases} \quad (8)$$

ce qui permet de montrer que le semi-groupe local obtenu par le Théorème 3.5 est dérivable au sens de Gâteaux dans  $\mathcal{X} = \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ .

**Théorème 3.6.** *Soit  $\rho_0 \in (\mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ ,  $r_0 \in (\mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ , et notons  $T_{\text{ex}}$  le temps d'existence de la solution du problème (7). Alors, pour tout temps  $t \in I_{\text{ex}}$  le semi-groupe local défini au Théorème 3.5 est Gâteaux différentiable dans  $\mathbf{L}^1$  dans la direction  $r_0$ . De plus, la dérivée  $DS_t(\rho_0)(r_0)$  de  $S_t$  en  $\rho_0$  dans la direction  $r_0$  est*

$$DS_t(\rho_0)(r_0) = \Sigma_t^{\rho_0}(r_0).$$

où  $\Sigma^{\rho_0}$  est l'application donnant la solution du problème linéarisé (8), lorsque  $\rho = S_t \rho_0$ , pour tout  $t \in I_{\text{ex}}$ .

Ces résultats sont décrits dans l'article [12].

**Interaction Groupe/Agent isolé.** En collaboration avec Rinaldo M. Colombo, j'ai également travaillé sur un nouveau modèle concernant l'interaction entre un groupe et un agent isolé (par exemple, un troupeau de moutons influencé par un chien, un ours poursuivi par des abeilles, une opinion publique et un meneur,...), mélangeant EDP hyperbolique et EDO du type :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x (\rho v(\rho) u(x, p)) = 0, & \rho(0, x) = \bar{\rho}(x), \\ \dot{p} = \varphi(p, (\rho(t) * \eta)(p)), & p(0) = \bar{p}, \\ (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, & \rho \in \mathbb{R}^+, \quad p \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (9)$$

où  $\rho$  est la densité de moutons dans le troupeau par exemple et  $p$  est la position du chien qui poursuit les moutons. Le champ de vecteurs  $u$  prenant ses valeurs dans la boule de rayon 1 représente alors la direction empruntée par les moutons en réponse à la présence du chien. La vitesse de ce dernier est décrite par le champ de vecteur  $\varphi$  qui lui-même dépend de la moyenne sur la densité de mouton visible par le chien. Cette moyenne est représentée par le produit de convolution  $\rho * \eta$ , où  $\eta$  est par exemple une fonction régulière, à valeurs dans  $[0, 1]$ , à support dans  $B(0, R)$  et telle que  $\|\eta\|_{\mathbf{L}^1} = 1$ . Par ailleurs, ce modèle peut éventuellement s'appliquer à un modèle de chemotaxie, où les cellules de densité  $\rho$  seraient attirées par un point mobile situé en  $p$ .

Les questions mathématiques qui se posent sont l'existence et l'unicité de solutions entropiques, ainsi que la contrôlabilité. Dans l'article soumis [13], nous avons prouvé l'existence de solutions pour le problème (9) et nous avons fourni quelques tests numériques.

**Modélisation de foules évitant les fortes densités.** La modélisation macroscopique des foules est un domaine récent et qui a donné lieu récemment à de nombreuses publications, que ce soit d'un point de vue expérimental [24, 25] ou théorique [7, 17, 19, 35]. En collaboration avec Rinaldo M. Colombo et Mauro Garavello, nous avons étudié un nouveau modèle macroscopique de trafic piéton en nous inspirant des travaux [7, 17, 19, 35] et des propriétés de l'équation de Keller-Segel  $\partial_t u + \operatorname{div}(u(1-u)g(u *_x K)) = 0$ . Dans ce nouveau modèle, les piétons modifient leur trajectoire préférée selon la présence éventuelle d'autres personnes; en effet, la densité de piétons  $\rho$  vérifie la loi de conservation

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v(\rho)(\nu(x) + \mathcal{I}(\rho(t))(x))) = 0, \quad (10)$$

où,  $v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est une fonction décroissante donnant le module de la vitesse, qui ne dépend que de la densité "ponctuelle"  $\rho(t, x)$ ;  $\nu \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$  est un champ de vecteur décrivant la trajectoire prise par les piétons en l'absence d'autres individus, et  $\mathcal{I} \in \mathcal{C}^0(\mathbf{L}^1, \mathcal{C}^2)$  est un fonctionnelle non-locale décrivant la réaction des piétons à la présence des autres personnes. Par exemple, si les piétons cherchent à éviter les zones de fortes densités, on peut introduire

$$\mathcal{I}(\rho) = -\varepsilon \frac{\nabla \rho * \eta}{\sqrt{1 + \|\nabla \rho * \eta\|^2}}, \quad (11)$$

où  $\varepsilon > 0$  est une constante donnée et  $\eta \in \mathcal{C}_c^3(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$  est un noyau de convolution fixé. Une variante de cette expression consiste à ajouter une fonction  $\varphi$  caractérisant l'angle de vision dans la direction  $\nu$  :

$$\mathcal{I}(\rho) = -\varepsilon \frac{\nabla \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y) \eta(x-y) \varphi((y-x) \cdot \nu(x)) dy}{\sqrt{1 + \|\nabla \int_{\mathbb{R}^N} \rho(y) \eta(x-y) \varphi((y-x) \cdot \nu(x)) dy\|^2}}, \quad (12)$$

avec par exemple  $\varphi = 0$  sur  $] -\infty, 0]$  et  $\varphi = 1$  sur  $[\theta, +\infty[$ . On prouve que (10)–(11) et (10)–(12) admettent une unique solution faible entropique et des résultats de stabilité par rapport aux différents paramètres. Ces résultats ont fait l'objet d'une note soumise [11] et d'un article en préparation.

## 4 **Projet de recherche : Existence et stabilité d'onde de choc pour des gaz réels, Étude du trafic routier ou piéton**

Dans le prolongement de mes travaux de recherche en thèse et ATER, mon projet de recherche concerne plus particulièrement des problèmes liés au temps d'existence des solutions, que ce soit en dynamique des fluides ou en trafic routier ou piéton. En effet, dans ces différents cas, des études précédentes nous assurent de l'existence et de l'unicité de solutions, sans préciser le temps d'existence. Je cherche à construire des solutions ayant un long temps d'existence.

Ainsi, deux axes se dégagent de mon projet de recherche. Le premier concerne l'existence en temps long et la stabilité des ondes de choc dans la dynamique des fluides compressibles. Je m'intéresse plus particulièrement aux gaz de Van der Waals qui ont un comportement plus proche de la réalité que celui des gaz parfaits. La théorie classique des systèmes hyperboliques nous assure de l'existence locale en temps de solutions ondes de chocs : le but ici est d'obtenir des solutions ondes de choc ayant un *long temps d'existence* dans divers cas particuliers. Je m'intéresse de plus à la *stabilité* des solutions ondes de choc à symétrie sphérique : si la condition initiale est presque radiale, la solution correspondante reste-t-elle proche d'une solution à symétrie sphérique pour des temps longs ? Une question similaire se pose pour les gouttes ou bulles comme solutions des équations de Euler–Korteweg.

Le deuxième axe concerne l'étude du *trafic routier ou piéton*, la modélisation de différents aspects de trafic routier, de mouvements de foule ou encore d'interaction entre un groupe et un agent isolé (leader ou prédateur). Les questions qui se posent sont : la justification du modèle introduit, éventuellement par des études numériques, l'existence et l'unicité de solutions ainsi que leur comportement en temps long, et enfin la contrôlabilité de ces équations. Par exemple, je veux modéliser l'impact d'une bretelle d'insertion sur le trafic autoroutier et étudier les solutions en temps long pour un tel modèle. Ceci correspond à un couplage de deux lois de conservation différentes de part et d'autre d'une interface fixe. Je veux également étudier le comportement d'une foule modélisée par la loi de conservation avec flux non-local (7) : préciser le temps d'existence de ces solutions (y a-t-il existence globale de solution ? explosion en temps fini ?) et savoir sous quelles conditions le problème à bord peut être traité. Enfin des problèmes de modélisation se posent : le comportement des solutions de (10) coïncide-t-il avec des données expérimentales ? Peut-on adapter ce modèle à l'interaction de deux populations allant dans des directions opposées ? Peut-on étudier le comportement asymptotique des solutions ? Comment traiter les bords du domaine ?

### 4.1 **Dynamique des fluides**

Je cherche dans cette partie à construire des solutions en temps long, régulières ou régulières par morceaux aux équations d'Euler compressibles. En particulier, je cherche à construire des solutions onde de choc avec un long temps d'existence dans différents cas : symétrie sphérique, gaz régis par des lois différentes de part et d'autre du choc, limite des chocs forts, ou bien une approximation du cas général.

#### a) **Existence d'ondes de choc en temps longs**

**Explosions entre différents types de gaz.** Une partie de mes travaux vise au recollement de solutions le long d'un choc selon la technique introduite par Li Ta Tsien [32] pour un gaz parfait polytropique unidimensionnel. J'ai obtenu des premiers résultats au cours de ma thèse dans le cas d'un gaz de Van der Waals à symétrie sphérique, en particulier dans le cas de l'implosion, ce qui est l'objet d'un article en préparation.

D'autre part, je voudrais étudier le couplage de deux gaz qui suivent deux lois d'états différentes. En effet, lors d'une explosion, on peut s'attendre à ce que le gaz soit plus poussiéreux derrière le choc que devant le choc, ce revient à juxtaposer un gaz poussiéreux (suivant la loi de Van der Waals) et un gaz parfait. Le problème se décrit donc comme le couplage de deux systèmes hyperboliques le long d'une frontière libre. Il faut alors déterminer le comportement de cette frontière libre et justifier l'existence de solutions en temps longs. Pour cela, on espère pouvoir faire de nouveau des calculs le long des caractéristiques permettant d'obtenir des estimations a priori des solutions. Peut-être est-il également possible d'adapter la méthode employée pour l'étude (2)–(3)–(4) ainsi que des résultats de B. Boutin [6] : le problème est que la frontière est maintenant libre et de plus, on aimerait se placer non seulement dans le cas 1D, mais aussi dans le cas de la symétrie sphérique.

**Solutions autosimilaires.** Concernant le temps d'existence des solutions régulières ou régulières par morceaux aux équations d'Euler compressibles pour des gaz réels tels que des gaz de Van der Waals, une autre piste à explorer consiste à revenir sur l'étude théorique des solutions autosimilaires dans la limite des chocs forts de Whitham [37] et Chisnell [10] et d'essayer de l'adapter aux gaz de Van der Waals. En introduisant la variable autosimilaire  $\xi = r/t^\alpha$ , et les variables adimensionnées  $w, y, z$ , on se ramène alors à l'étude d'un système d'EDO autonome non-résolu, de la forme

$$A(w, y, z) \begin{pmatrix} \ln w \\ y \\ z \end{pmatrix}' = B(w, y, z),$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices,  $w, y, z$  correspondent respectivement aux variables densité  $\rho$ , vitesse  $u$ , vitesse du son  $c^2$ . On remarque que la matrice  $A$  s'inverse en-dehors de la surface de singularité  $z = y^2$ . Les conditions aux bords (au niveau du choc et à l'infini), nous indiquent d'autre part que cette singularité doit être traversée par la courbe intégrale. Je voudrais donc déterminer en quels points la singularité est fictive et quel est le comportement de la solution associée. En particulier, obtient-on des conditions sur le coefficient d'auto-similitude  $\alpha$  ?

**Équation d'évolution de la surface de discontinuité.** Dans ma thèse, j'ai mis en œuvre la méthode de G. B Whitham [37, p. 280] d'approximation dans des tubes de rayons, et obtenu une équation de mouvement de la surface de discontinuité pour les gaz de Van der Waals. Plus précisément, la surface de discontinuité d'une solution onde de choc des équations d'Euler compressibles étant donnée sous la forme :  $\Sigma(t) = \{x \in \mathbb{R}^d; \beta(x) = c_0 t\}$ , où  $c_0$  est la vitesse du son dans le gaz au repos devant le choc, l'équation vérifiée par  $\beta$  est donnée de manière approchée par :

$$\left( \frac{f(1/|\nabla\beta|)}{1 - |\nabla\beta|^2} + 1 \right) \frac{\nabla\beta^{\mathbf{T}}}{|\nabla\beta|} \nabla^2 \beta \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|} = \Delta\beta, \quad (13)$$

où  $f$  est une fonction régulière donnée. Une étude élémentaire de cette équation nous donne que l'équation (13) est strictement hyperbolique tant que  $|\nabla\beta| < 1$  et qu'elle est de type elliptique pour  $|\nabla\beta| > 1$ . Lorsqu'on considère des solutions à symétrie sphérique, on retrouve au voisinage de l'origine des valeurs du coefficient d'auto-similitude proches d'estimations dues en particulier à C. C. Wu & P. H. Roberts [38]. D'une part, j'aimerais mettre en relation la convexité de la surface de discontinuité au temps initial et d'autre part le temps d'existence. D'autre part, mon objectif est de déterminer dans quelle mesure

l'approximation des tubes de rayons est justifiée. Une étude plus précise des tubes de rayons est par ailleurs menée dans P. Prasad [36] lorsque le choc est faible, l'approximation de G. B. Whitham [37] étant assez bonne lorsque le choc est fort d'après [36, p. 319].

## b) Stabilité d'ondes à symétrie sphérique

Cette partie concerne la stabilité de solutions, en particulier des solutions onde de choc à symétrie sphérique étudiées précédemment : si on perturbe ces solutions, restent-elles proches d'une solution à symétrie sphérique ? Dans le prolongement de cette question, j'aimerais m'intéresser à la stabilité de gouttes ou bulles comme solutions à symétrie sphérique des équations de Euler–Korteweg.

**Harmoniques sphériques.** Par un développement en harmoniques sphériques, d'après [21, 38], les solutions autosimilaires obtenues pour un gaz de Van der Waals dans la limite des chocs forts sont instables. À partir de l'observation du phénomène de sonoluminescence, au cours duquel une bulle implose sans se détruire jusqu'à 20000 fois par seconde, on s'attend en fait à obtenir sous certaines conditions des modes stables lors de la focalisation. La question qui se pose est alors de savoir si les solutions (approchées) obtenues en étudiant l'évolution de la surface de discontinuité sont aussi instables. Pour traiter cette question, je voudrais par exemple étudier l'évolution au cours du temps d'une perturbation de l'équation (13), linéarisée autour d'une solution à symétrie sphérique.

**Gouttes et bulles.** Selon l'article de H. Gouin & M. Slemrod [22] les gouttes ou bulles (interfaces liquide-vapeur sphériques stationnaires) décrites par le modèle de Korteweg–Van der Waals pour les fluides capillaires

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_r(\rho u) + \frac{2\rho u}{r} & = 0, \\ \partial_t u + u \partial_r u + \frac{p'(\rho)}{\rho} \partial_r \rho & = \alpha \partial_r \Delta \rho. \end{cases} \quad (14)$$

sont stables lorsque leur rayon est assez petit et instables sinon. J'aimerais justifier cela rigoureusement par l'étude du spectre de l'opérateur. Pour cela, on peut étudier une fonction d'Evans [4] associée au système stationnaire.

## 4.2 Modélisation du trafic (routier et piéton)

Dans cette partie, je cherche à modéliser des aspects du trafic routier ou piéton ou encore l'interaction entre un leader/prédateur et un groupe. Les questions qui se posent, outre la modélisation, sont l'existence et l'unicité de solutions, l'étude du temps d'existence mais aussi la contrôlabilité de ces équations.

Par exemple, je cherche à modéliser un rond-point ou une insertion de véhicules sur autoroute. J'ai déjà obtenu (voir [34]) l'existence et l'unicité de solutions locales en temps pour le problème de Riemann sur un rond-point avec priorité forte (de type stop). Je veux maintenant modéliser une intersection avec une priorité faible (de type cédez-le-passage), étudier pour ce modèle le problème de Riemann, mais aussi le problème de Cauchy et étudier le temps d'existence des solutions. De façon plus générale, ce problème correspond à un couplage de deux lois de conservation à une interface : le passage de l'interface est régi par le comportement physique du modèle.

Je veux également étudier le temps d'existence pour un modèle de trafic piéton qui s'écrit sous forme de loi de conservation avec un flux non-local. Le caractère non-local de ce modèle ne permet pas d'obtenir des bornes dans  $L^\infty$  : je veux donc déterminer

s'il peut advenir des phénomènes d'explosion dans  $\mathbf{L}^\infty$  ou bien s'il existe des solutions faibles globales. D'autres questions se posent naturellement pour ce problème, en particulier l'existence de solutions pour un problème à bord. Concernant la modélisation des foules, je veux également étudier l'interaction entre deux populations ayant des lois de vitesses différentes.

Enfin, je m'intéresse à la modélisation de l'interaction d'un groupe avec un agent isolé (un leader ou un prédateur), plus précisément je veux formaliser des questions de contrôle d'un groupe : comment déterminer la trajectoire d'un leader pour amener le plus vite possible un groupe à un endroit donné, combien faut-il de chiens de berger pour contenir un groupe de moutons ?

### a) Insertion de véhicules sur un rond-point ou une autoroute

Dans l'article [34], j'ai présenté un modèle de rond-point dont un élément fondamental est la modélisation d'un point d'entrée et de sortie de véhicule sur une voie prioritaire. J'ai de plus démontré l'existence locale en temps et l'unicité de solutions faibles entropiques pour le problème de Riemann associé à ce problème.

Un problème naturel est alors celui de l'existence en temps grand du problème de Riemann pour des jonctions périodiquement distribuées, et pour des données initiales périodiques. Ensuite, vient le problème de Cauchy pour ce problème de rond-point. Dans ma thèse, j'ai étudié quelques cas particuliers grâce à la méthode de *front tracking*. Je veux désormais étudier le cas général.

Une autre question intéressante consiste à étudier le comportement asymptotique des solutions de ce modèle en s'inspirant d'un article de J. Ehrt & J. Härterich [20].

D'autre part, le modèle que j'ai introduit correspond plus au comportement à un stop qu'à un cédez-le-passage. Si ce comportement peut se justifier au niveau d'un carrefour giratoire de petite taille, c'est cependant impossible si on considère une autoroute ou un périphérique. Je pense donc à modifier le modèle précédent afin d'obtenir un comportement compatible avec des données réelles [8, 9] fournies par L. Leclercq de l'INRETS de Lyon. En effet, d'après les modèles de Daganzo [18] ou de Lebacque [27], le comportement des véhicules au niveau d'une convergence de voies diffère en fonction des demandes sur la voie principale et la voie secondaire et en fonction de la capacité d'accueil et de la saturation de la voie principale. Il y aurait donc différents cas à distinguer :

1. Régime non-congestionné ;
2. Régime congestionné avec forte demande sur la voie secondaire, voie principale fluide ;
3. Régime congestionné avec forte demande sur la voie principale, voie secondaire fluide ;
4. Régime congestionné avec forte demande sur la voie principale et sur la voie secondaire.

Par exemple, selon Daganzo [18], en régime congestionné avec forte demande sur la voie principale et sur la voie secondaire, la répartition des flux de véhicules venant de la voie d'insertion est la suivante : en notant  $q_1^+$  le flux de véhicules restant sur la route et  $q_3^+$  le flux de véhicule venant de la route secondaire, pour un certain  $\gamma$  appelé *coefficient d'agressivité*, issu de l'expérience ( $\gamma \simeq 0,3$ ), on doit avoir  $\frac{q_3^+}{q_1^+} = \gamma$ .

A priori, ces comportements différents pourraient être pris en compte par une meilleure expression de la fonction d'entrée sur la voie principale  $o(t)$ , qui détermine le flux de véhicules s'insérant sur la route principale en  $x = 0$ . Cette fonction devrait alors dépendre alors des données initiales sur la voie et de la demande à partir de la voie secondaire. Je veux donc vérifier que le problème de Riemann admet de nouveau des solutions faibles entropiques et étudier le temps d'existence de ces solutions.

## b) Lois de conservation avec flux non-local

Dans l'étude des lois de conservation scalaires avec flux non-local, en collaboration avec R. M. Colombo et M. Herty, nous avons obtenu l'existence locale de solutions pour le problème de Cauchy associé à l'équation  $\partial_t u + \operatorname{div}(uV(u)) = 0$ , où  $V : \mathbf{L}^1 \mapsto \mathbf{W}^{2,1}$  est une fonctionnelle non-locale régularisante (voir [12]). Cette équation modélise en particulier le comportement d'une foule paniquée, ou encore une chaîne de montage avec produits réentrants. Dans le modèle de trafic piéton, on considère  $V(u) = v(u * \eta) w(x)$ , où  $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  est une fonction continue décroissante (typiquement,  $v(u) = 1 - u$  si  $u \in [0, 1]$  et  $v(u) \equiv 0$  si  $u \geq 1$ ), et  $w : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$  est un champ de vecteurs décrivant le comportement global des piétons, et éventuellement la présence d'obstacles. La présence du produit de convolution dans cette équation, qui modélise le fait que les piétons réagissent à ce qu'ils ressentent en moyenne de la présence des autres piétons, donne des comportements singuliers. Ainsi, on s'attend à ce que la densité ne reste pas bornée par 1, même si elle l'était au temps initial. Cet aspect n'est cependant pas complètement absurde si on pense à divers événements de « ruée », où la densité a dépassé 10 piétons par mètre-carré, alors qu'on s'attend à ce qu'en temps normal la densité reste en-dessous de 5 piétons par mètre-carré environ.

Dans [12], on a de plus su dériver au sens de Gâteaux le semi-groupe donnant la solution par rapport aux conditions initiales. La question est maintenant de savoir estimer le temps d'existence : peut-on avoir existence en temps long, éventuellement pour des solutions plus faibles ? Je travaille actuellement en collaboration avec G. Crippa sur ce sujet : il semble possible d'obtenir *l'existence et l'unicité de solutions faibles* en utilisant des techniques propres à l'étude de l'équation de continuité  $\partial_t u + \operatorname{div}(bu) = 0$  ainsi que des outils de transport optimal [1]. Par exemple, concernant l'unicité, si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont des solutions (positives, de mesure 1) associés à des flux lagrangiens pour  $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v(\rho * \eta)w(x)) = 0$ , on veut obtenir une estimation de la distance faible entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$

$$W_1(\rho_1, \rho_2) = \inf_{T; \rho_2 = T\# \rho_1} \int |x - Tx| \rho_1(x) dx .$$

Concernant l'existence, on souhaite appliquer un théorème de compacité des flux lagrangiens [16, Cor. 3.6].

D'autre part, pour les modèles de trafic piéton (7) et (10), des problèmes dûs à la géométrie des lieux apparaissent si on considère que les piétons marchent dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , et si au lieu de  $\rho * \eta$  on introduit la fonctionnelle

$$\mathcal{I}(\rho) = \int_{\substack{y \in \Omega \\ [x, y] \subset \Omega}} \rho(y) \eta(x - y) dy ,$$

ce qui revient ne considérer que les points visibles à partir du point  $x$ . Cette expression apporte des difficultés techniques et numériques qu'il reste à traiter.

Il pourrait aussi être intéressant de comparer le comportement de solutions numériques de (7) et de (10). Enfin, pour ces deux modèles de trafic piéton, il serait intéressant de savoir dériver au sens de Gâteaux par rapport au paramètre géométrique  $w$ , afin de déterminer quelle géométrie doit avoir une salle pour éviter les phénomènes d'étouffement lors de ruées.

J'aimerais de plus m'intéresser au problème à bords pour les équations (7) ou (10), puisque dans les modèles de trafic piéton et de chaîne de montage des conditions aux bords apparaissent assez naturellement. En effet, on aimerait caractériser le temps d'évacuation d'une salle, ou encore le rendement d'une chaîne de montage.

## c) Interaction Groupe/Agent isolé

Dans l'article [13], en collaboration avec Rinaldo M. Colombo, nous montrons l'existence de solutions pour le problème (9) où  $\rho$  est la densité du groupe (densité de moutons

dans le troupeau / d'oiseaux / de rats / ...) et  $p$  est la position de l'agent isolé, qui est soit un leader soit un prédateur (chien de berger / aigle / joueur de flûte de Hamelin / ...). Ces modèles peuvent également s'appliquer au contrôle des foules qui peuvent être menées ou repoussées. Le champ de vecteurs  $u$  prend ses valeurs dans la boule de rayon 1 et représente la direction empruntée par le groupe en réponse à la présence du leader/prédateur. La vitesse de ce dernier est décrite par le champ de vecteur  $\varphi$  qui lui-même dépend de la moyenne sur la densité du groupe qu'il perçoit. Cette moyenne est représentée par le produit de convolution  $\rho * \eta$ , où  $\eta$  est par exemple une fonction régulière, à valeurs dans  $[0, 1]$ , à support dans  $B(0, R)$  et telle que  $\|\eta\|_{\mathbf{L}^1} = 1$ .

Des problèmes de modélisation et de contrôlabilité s'ouvrent désormais. Par exemple, on voudrait déterminer la trajectoire optimale du joueur de flûte pour amener le population de rats le plus vite possible hors de la ville. On se demande également combien de chiens il faut au minimum pour contenir un groupe de moutons dans une zone de l'espace.

## Références

- [1] L. Ambrosio and G. Crippa. Existence, uniqueness, stability and differentiability properties of the flow associated to weakly differentiable vector fields. In *Transport equations and multi-D hyperbolic conservation laws*, volume 5 of *Lect. Notes Unione Mat. Ital.*, pages 3–57. Springer, Berlin, 2008.
- [2] C. Bardos, A. Y. le Roux, and J.-C. Nédélec. First order quasilinear equations with boundary conditions. *Comm. Partial Differential Equations*, 4(9) :1017–1034, 1979.
- [3] S. Benzoni-Gavage and D. Serre. *Multi-dimensional hyperbolic partial differential equations : First-order Systems and Applications*. Oxford Science publication, 2006.
- [4] S. Benzoni-Gavage, D. Serre, and K. Zumbrun. Alternate Evans functions and viscous shock waves. *SIAM J. Math. Anal.*, 32(5) :929–962 (electronic), 2001.
- [5] F. Bouchut and B. Perthame. Kružkov's estimates for scalar conservation laws revisited. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(7) :2847–2870, 1998.
- [6] B. Boutin, C. Chalons, and P.-A. Raviart. Existence result for the coupling problem of two scalar conservation laws with Riemann initial data. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(10) :1859–1898, 2010.
- [7] A. Bressan and R. M. Colombo. P.d.e. models of pedestrian flow. 2007.
- [8] E. Chevallier. *Modélisation dynamique du trafic et du bruit au niveau des carrefours giratoires*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2008.
- [9] E. Chevallier and L. Leclercq. A macroscopic theory for unsignalized intersections. *Transportation Research part B*, 41 :1139–1150, 2007.
- [10] R. F. Chisnell. The motion of a shock wave in a channel, with applications to cylindrical and spherical shock waves. *J. Fluid Mech.*, 2 :286–298, 1957.
- [11] R. M. Colombo, M. Garavello, and M. Lécureux-Mercier. Non-local crowd dynamics. *Submitted*, 2011.
- [12] R. M. Colombo, M. Herty, and M. Mercier. Control of the continuity equation with a non-local flow. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2010.
- [13] R. M. Colombo and M. Lécureux-Mercier. An analytical framework to describe the interactions between individuals and a continuum. *Submitted*, 2010.
- [14] R. M. Colombo, M. Mercier, and M. D. Rosini. Stability and total variation estimates on general scalar balance laws. *Communications in Mathematical Sciences*, 7(1) :37–65, 2009.
- [15] R. M. Colombo, M. Mercier, and M. D. Rosini. Stability estimates on general scalar balance laws. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347 :45–48, 2009.
- [16] G. Crippa and C. De Lellis. Estimates and regularity results for the DiPerna-Lions flow. *J. Reine Angew. Math.*, 616 :15–46, 2008.

- [17] E. Cristiani, B. Piccoli, and A. Tosin. Multiscale modeling of granular flows with application to crowd dynamics. *Multiscale Modeling & Simulation*, 9(1) :155–182, 2011.
- [18] C. F. Daganzo. The cell transmission model, part II : Network traffic. *Transportation Research Part B*, 29 (2) :79–93, 1995.
- [19] M. Di Francesco, P. A. Markowich, J.-F. Pietschmann, and M.-T. Wolfram. On the hughes’ model for pedestrian flow : The one-dimensional case. Submitted preprint, 2010.
- [20] J. Ehrt and J. Härterich. Asymptotic behavior of spatially inhomogeneous balance laws. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2(3) :645–672, 2005.
- [21] A. K. Evans. Instability of converging shock waves and sonoluminescence. *Physical Review E*, 54(5) :5004–5011, 1996.
- [22] H. Gouin and M. Slemrod. Stability of spherical isothermal liquid-vapor interfaces. *Meccanica*, 30(3) :305–319, 1995.
- [23] M. Grassin. Global smooth solutions to Euler equations for a perfect gas. *Indiana Univ. Math. J.*, 47(4) :1397–1432, 1998.
- [24] D. Helbing and A. Johansson. Pedestrian, crowd and evacuation dynamics. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, pages 6476–6495, 2010.
- [25] S. Hoogendoorn and P. H. L. Bovy. Pedestrian route-choice and activity scheduling theory and model. *Transp. Res. B*, 38(2) :169 – 190, 2004.
- [26] S. N. Kružkov. First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)*, 81 (123) :228–255, 1970.
- [27] J. P. Lebacque and M. M. Khoshyaran. Modelling vehicular traffic flow on networks using macroscopic models. In *Finite volumes for complex applications II*, pages 551–558. Hermes Sci. Publ., Paris, 1999.
- [28] M. Lécureux-Mercier. Improved stability estimates on general scalar balance laws. *Submitted*, 2010.
- [29] M. Lécureux-Mercier.  $L^1$  stability for scalar balance laws ; application to pedestrian traffic. *Proceedings of the conference HYP 2010, Beijing*, 2010.
- [30] M. Lécureux-Mercier. Stability of scalar balance laws and scalar non-local conservation laws. *Proceedings of the conference Intensive Research Month on Hyperbolic Conservation Laws and Fluid Dynamics in Parma*, 2010.
- [31] M. Lécureux-Mercier. Global smooth solutions of Euler equations for Van der Waals gases. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2011.
- [32] T. T. Li. *Global classical solutions for quasilinear hyperbolic systems*, volume 32 of *RAM : Research in Applied Mathematics*. Masson, Paris, 1994.
- [33] B. J. Lucier. A moving mesh numerical method for hyperbolic conservation laws. *Math. Comp.*, 46(173) :59–69, 1986.
- [34] M. Mercier. Traffic flow modelling with junctions. *J. Math. Anal. Appl.*, 350(1) :369–383, 2009.
- [35] B. Piccoli and A. Tosin. Pedestrian flows in bounded domains with obstacles. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 21 :85–107, 2009. 10.1007/s00161-009-0100-x.
- [36] P. Prasad. *Nonlinear hyperbolic waves in multi-dimensions*, volume 121 of *Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001.
- [37] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [38] C. C. Wu and P. H. Roberts. Structure and stability of a spherical shock wave in a van der Waals gas. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 49(4) :501–543, 1996.