

Persistence d'ondes dans les fluides compressibles.

Magali Mercier

Institut Camille Jordan, Lyon

Besançon, le 20 avril 2010

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

On s'intéresse aux équations d'Euler compressibles pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (\text{A})$$

où ρ , u , s sont respectivement la densité, la vitesse et l'entropie spécifique du gaz.

De plus on se donne une loi d'état $p : \rho, s \mapsto p(\rho, s)$.

Pour un gaz parfait polytropique (GPP) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \rho^{\gamma_0} \exp(s/c_v),$$

avec $\gamma_0 \in]1, 3]$ et plus particulièrement $\gamma_0 = 5/3, 7/5$ ou $6/5$.

Pour un gaz de Van der Waals (VdW) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\gamma_0} \exp(s/c_v).$$

On s'intéresse aux équations d'Euler compressibles pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (\text{A})$$

où ρ , u , s sont respectivement la densité, la vitesse et l'entropie spécifique du gaz.

De plus on se donne une loi d'état $p : \rho, s \mapsto p(\rho, s)$.

Pour un gaz parfait polytropique (GPP) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \rho^{\gamma_0} \exp(s/c_v),$$

avec $\gamma_0 \in]1, 3]$ et plus particulièrement $\gamma_0 = 5/3, 7/5$ ou $6/5$.

Pour un gaz de Van der Waals (VdW) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\gamma_0} \exp(s/c_v).$$

On s'intéresse aux équations d'Euler compressibles pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (\text{A})$$

où ρ , u , s sont respectivement la densité, la vitesse et l'entropie spécifique du gaz.

De plus on se donne une loi d'état $p : \rho, s \mapsto p(\rho, s)$.

Pour un gaz parfait polytropique (GPP) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \rho^{\gamma_0} \exp(s/c_v),$$

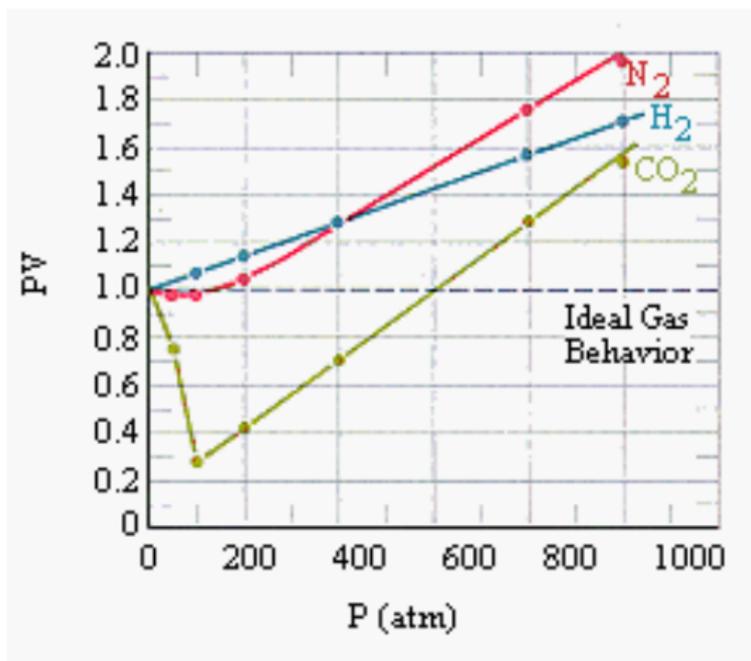
avec $\gamma_0 \in]1, 3]$ et plus particulièrement $\gamma_0 = 5/3, 7/5$ ou $6/5$.

Pour un gaz de Van der Waals (VdW) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\gamma_0} \exp(s/c_v).$$

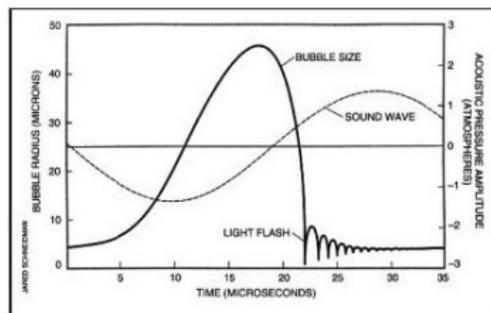
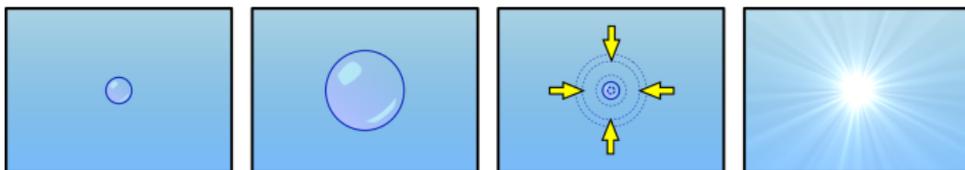
Gaz	He	Ne	H ₂	CO ₂	Vapeur d'eau
b (cm ³ /mol)	23.71	17.10	26.61	42.69	30.52

Tab.: van der Waals Coefficients, Data from Fishbane, et al.



Sonoluminescence

Wu & Roberts (1995) étudient les ondes de choc sphériques dans un gaz de Van der Waals afin de modéliser le phénomène de sonoluminescence. Quand la bulle se rétracte, on pense que la pression atteint 200Mbars.



Objectifs

On aimerait construire des solutions à symétrie sphérique ayant un long temps d'existence pour un gaz de VdW/gaz poussiéreux.

- Trouver des solutions régulières globales en temps pour un gaz de VdW ;
- Juxtaper deux solutions régulières le long d'une ligne de discontinuité.

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

• Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (ρ, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

• Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (x, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t x + u \cdot \nabla x + \frac{2\mu}{\gamma} (1 + \frac{\mu}{2} \frac{\gamma^2}{\mu^2} x^{\mu-2}) \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{\mu}{\gamma} \frac{\gamma^2}{\mu^2} (1 + \frac{\mu}{2} \frac{\gamma^2}{\mu^2} x^{\mu-2}) \rho \nabla x + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (8)$$

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (ρ, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{s}{\gamma_0 c_v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{-\frac{s}{\gamma_0 c_v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{s}{\gamma_0 c_v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (\text{B})$$

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (p, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t p + u \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{s}{\gamma_0 c_v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{-\frac{s}{\gamma_0 c_v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{s}{\gamma_0 c_v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (B)$$

$$\text{avec } \gamma = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}} \left(\frac{\pi}{\pi_0} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2}} \tilde{b} = \tilde{b} \left(\frac{\pi}{\pi_0} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2}} \text{ et } \nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} > 1$$

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (p, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t p + u \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{\frac{s}{\gamma_0 c v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (\text{B})$$

avec $\pi = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{p}{\gamma_0 - 1} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}}$, $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0 - 1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}}$ et $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} > 1$.

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (p, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t p + u \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{\frac{s}{\gamma_0 c v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (\text{B})$$

avec $\pi = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{p}{\gamma_0 - 1} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}}$, $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0 - 1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}}$ et $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} > 1$.

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (p, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t p + u \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{\frac{s}{\gamma_0 c v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (\text{B})$$

avec $\pi = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{p}{\gamma_0 - 1} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}}$, $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0 - 1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}}$ et $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} > 1$.

Existence locale : Solutions régulières

Théorème

Le problème de Cauchy pour (A) avec les conditions initiales

$(\rho_0, u_0, s_0) \in (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{s}) + \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ pour $\bar{\rho} > 0$ et $m > 1 + \frac{d}{2}$ admet une solution classique $(\rho, u, s) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ avec $T > 0$.

Théorème

On considère un gaz de Van der Waals à c_v constant. Le problème de Cauchy (B) avec les conditions initiales $(\pi_0, u_0, s_0) \in \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ pour $m > 1 + d/2$ admet une solution classique $(\pi, u, s) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ avec $T > 0$.

Existence locale : Solutions régulières par morceaux

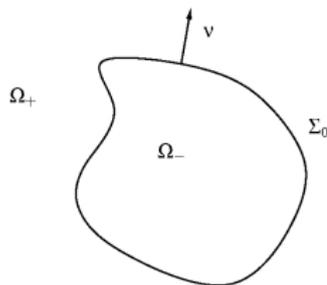


Fig.: Surface de discontinuité.

Conditions de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} -U[\rho] + [\rho(u \cdot \nu)] = 0, \\ -U[\rho u] + [\rho(u \cdot \nu)u + p\nu] = 0, \\ -U[\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e] \\ \quad + [(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e)(u \cdot \nu) + p(u \cdot \nu)] = 0, \end{cases} \quad (C)$$

Condition de choc de Lax

$$u_0^+ \cdot \nu + \sqrt{\partial_\rho p(\rho_0^+)} < U < u_0^- \cdot \nu + \sqrt{\partial_\rho p(\rho_0^-)} \quad (D)$$

Théorème de Majda : existence locale en temps de solutions ondes de choc satisfaisant les conditions de Rankine-Hugoniot (C) et de choc de Lax (D) au niveau de $\Sigma(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

Critères d'explosions ne précisant pas le temps d'explosion

- T. C. Sideris (1985) : GPP de densité $\rho \geq \bar{\rho} > 0$, gaz dans une boule, comprimé, à vitesse sortante.
- T. Makino, S. Ukai & S. Kawashima (1986) : GPP, (ρ_0, u_0) à support compact.
- J.-Y. Chemin (1990) : GPP isentropique 1D, sous les hypothèses

$$\begin{aligned}
 (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0) &\in \mathbf{H}_{ul}^m, && \text{pour } m > 3/2, \\
 x^2 \rho_0 &\in \mathbf{L}^1, \\
 |u_0(x)| &\leq \frac{2}{\gamma-1} c_0.
 \end{aligned}$$

Cas d'existence presque globale, en symétrie sphérique

- Q. Qiu & H. Yin (1999) : cas isentropique
- P. Godin (2005) : cas général

Soit $\bar{\rho} > 0$. Pour des conditions initiales de la forme

$$\rho_0(r) = \bar{\rho} + \varepsilon \rho_1(r), \quad u_0(r) = \varepsilon u_1(r), \quad s_0(r) = \bar{s} + \varepsilon s_1(r),$$

alors le problème de Cauchy (A) pour ces conditions initiales admet une solution régulière jusqu'au temps T_ε tel que

$$\ln T_\varepsilon \sim \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right)$$

Cas d'existence globale

Solutions stationnaires,

Cas isentropique 1D : Li Ta Tsien (1981), s'inspire du cas scalaire.

Existence globale dans le cas multidimensionnel

- D. Serre (1997) : GPP. Soit $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, matrice n 'admettant pas de valeurs propres réelle négative. Si $\bar{u}_0(x) = A_0 x$, $\bar{s} \in \mathbb{R}$ et

$$\left\| (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0 - \bar{u}_0, s_0 - \bar{s}) \right\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon,$$

alors la solution classique est globale.

- M. Grassin (1998) : GPP, Hypothèses : ρ_0, s_0 à support compact, $Du_0 \in \mathbf{L}^\infty$, $D^2 u_0 \in \mathbf{H}^{m-1}$ et

$$\left\| (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, s_0) \right\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon,$$

$$\text{dist}(\text{Spec}(Du_0), \mathbb{R}^-) \geq \delta > 0.$$

Existence globale dans le cas multidimensionnel

- D. Serre (1997) : GPP. Soit $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, matrice n'admettant pas de valeurs propres réelle négative. Si $\bar{u}_0(x) = A_0 x$, $\bar{s} \in \mathbb{R}$ et

$$\left\| (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0 - \bar{u}_0, s_0 - \bar{s}) \right\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon,$$

alors la solution classique est globale.

- M. Grassin (1998) : GPP, Hypothèses : ρ_0, s_0 à support compact, $Du_0 \in \mathbf{L}^\infty$, $D^2 u_0 \in \mathbf{H}^{m-1}$ et

$$\left\| (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, s_0) \right\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon,$$

$$\text{dist}(\text{Spec}(Du_0), \mathbb{R}^-) \geq \delta > 0.$$

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

Théorème (M.)

On considère un gaz de Van der Waals, tel que (π_0, u_0, s_0) soient les conditions initiales associées au système (B). Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1}$ et

- $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$,
- $\|(\pi_0, s_0)\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon_0$, où $m > 1 + d/2$, et π_0, s_0 sont à support compact,
- $Du_0 \in \mathbf{L}^\infty$, $D^2 u_0 \in \mathbf{H}^{m-1}$,
- $\text{dist}(\text{Spec}(Du_0), \mathbb{R}^-) \geq \delta > 0$,

alors il existe une solution classique globale.

Remarques :

- La 1ère condition revient à : $\gamma_0 \in]1, \frac{m+1}{m-1}] \cup \{\frac{n+1}{n-1}; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.
- Ce théorème peut en particulier s'appliquer pour des conditions initiales à symétrie sphérique.

Théorème (M.)

On considère un gaz de Van der Waals, tel que (π_0, u_0, s_0) soient les conditions initiales associées au système (B). Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1}$ et

- $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$,
- $\|(\pi_0, s_0)\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon_0$, où $m > 1 + d/2$, et π_0, s_0 sont à support compact,
- $Du_0 \in \mathbf{L}^\infty$, $D^2 u_0 \in \mathbf{H}^{m-1}$,
- $\text{dist}(\text{Spec}(Du_0), \mathbb{R}^-) \geq \delta > 0$,

alors il existe une solution classique globale.

Remarques :

- La 1ère condition revient à : $\gamma_0 \in]1, \frac{m+1}{m-1}] \cup \{\frac{n+1}{n-1}; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.
- Ce théorème peut en particulier s'appliquer pour des conditions initiales à symétrie sphérique.

Idée de preuve

- ❶ Comme M. Grassin, on introduit un problème approché

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = 0, \quad \bar{u}(0, x) = u_0(x).$$

- ❷ Cas isentropique. Le système s'écrit

$$\partial_t U + \sum_j A_j(U) = B(\bar{u}, D\bar{u}, U, DU) + F(D\bar{u}, U, DU)$$

où $U = (\pi, u - \bar{u})$ et

$$F(D\bar{u}, U, DU) = -\frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^\nu \left(\frac{\operatorname{div} u}{\nabla \pi} \right).$$

- Existence locale, Unicité locale.
- Estimations d'énergie.

- ❸ Cas général

Idée de preuve

- ❶ Comme M. Grassin, on introduit un problème approché

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = 0, \quad \bar{u}(0, x) = u_0(x).$$

- ❷ Cas isentropique. Le système s'écrit

$$\partial_t U + \sum_j A_j(U) = B(\bar{u}, D\bar{u}, U, DU) + F(D\bar{u}, U, DU)$$

où $U = (\pi, u - \bar{u})$ et

$$F(D\bar{u}, U, DU) = -\frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^\nu \left(\begin{array}{c} \operatorname{div} u \\ \nabla \pi \end{array} \right).$$

- Existence locale, Unicité locale.
- Estimations d'énergie.

- ❸ Cas général

Idée de preuve

- ❶ Comme M. Grassin, on introduit un problème approché

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = 0, \quad \bar{u}(0, x) = u_0(x).$$

- ❷ Cas isentropique. Le système s'écrit

$$\partial_t U + \sum_j A_j(U) = B(\bar{u}, D\bar{u}, U, DU) + F(D\bar{u}, U, DU)$$

où $U = (\pi, u - \bar{u})$ et

$$F(D\bar{u}, U, DU) = -\frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^\nu \left(\begin{array}{c} \operatorname{div} u \\ \nabla \pi \end{array} \right).$$

- Existence locale, Unicité locale.
- Estimations d'énergie.

- ❸ Cas général

On veut estimer $\int_{\mathbb{R}^d} D^k U \cdot D^k (F(D\bar{u}, U, DU))$. On utilise le lemme :

Lemme

Soit $f \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{H}^m$. Si $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$, alors $f^\nu \in \mathbf{H}^m$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k \leq m$, on a

$$\|\partial^\alpha (f^\nu)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \|D^k f\|_{\mathbf{L}^2}.$$

On obtient au final l'inégalité :

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{a}{1+t} Z \leq C \left(Z^2 + \frac{Z}{(1+t)^2} + (1+t)^{\nu-1} Z^{\nu+1} \right).$$

Après intégration, on a finalement, avec $f(x) = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{x^\nu}{1+x^\nu} \right)$,

$$Z(t) \leq \frac{1}{(1+t)^a} \exp \left(\frac{-C}{1+t} \right) f^{-1} \left(f(e^C Z(0)) + \frac{C}{a-1} \right).$$

On veut estimer $\int_{\mathbb{R}^d} D^k U \cdot D^k (F(D\bar{u}, U, DU))$. On utilise le lemme :

Lemme

Soit $f \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{H}^m$. Si $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$, alors $f^\nu \in \mathbf{H}^m$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k \leq m$, on a

$$\|\partial^\alpha (f^\nu)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \|D^k f\|_{\mathbf{L}^2}.$$

On obtient au final l'inégalité :

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{a}{1+t} Z \leq C \left(Z^2 + \frac{Z}{(1+t)^2} + (1+t)^{\nu-1} Z^{\nu+1} \right).$$

Après intégration, on a finalement, avec $f(x) = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{x^\nu}{1+x^\nu} \right)$,

$$Z(t) \leq \frac{1}{(1+t)^a} \exp \left(\frac{-C}{1+t} \right) f^{-1} \left(f(e^C Z(0)) + \frac{C}{a-1} \right).$$

On veut estimer $\int_{\mathbb{R}^d} D^k U \cdot D^k (F(D\bar{u}, U, DU))$. On utilise le lemme :

Lemme

Soit $f \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{H}^m$. Si $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$, alors $f^\nu \in \mathbf{H}^m$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k \leq m$, on a

$$\|\partial^\alpha (f^\nu)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \|D^k f\|_{\mathbf{L}^2}.$$

On obtient au final l'inégalité :

$$\frac{dZ}{dt} + \frac{a}{1+t} Z \leq C \left(Z^2 + \frac{Z}{(1+t)^2} + (1+t)^{\nu-1} Z^{\nu+1} \right).$$

Après intégration, on a finalement, avec $f(x) = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{x^\nu}{1+x^\nu} \right)$,

$$Z(t) \leq \frac{1}{(1+t)^a} \exp \left(\frac{-C}{1+t} \right) f^{-1} \left(f(e^C Z(0)) + \frac{C}{a-1} \right).$$

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

En posant $H(\rho) = \int^\rho \frac{c(y)}{y} dy$, et

$$\begin{aligned} w_1 &= u - H, & w_2 &= u + H, \\ \lambda_1 &= u - c, & \lambda_2 &= u + c, \end{aligned}$$

le système (A) se récrit

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1(w) \partial_x w_1 = 0, \\ \partial_t w_2 + \lambda_2(w) \partial_x w_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Théorème

Soient $w_{1,0}, w_{2,0} \in C^1 \cap W^{1,\infty}$. Si $w'_{1,0} \geq 0$, $w'_{2,0} \geq 0$ alors la solution classique est globale en temps.

Si $w'_{1,0} \geq 0$, $w'_{2,0} < 0$, on aura existence d'une solution régulière jusqu'au temps

$$T_* = \frac{1}{\max(-w'_{2,0} e^{k(w_0)})} \frac{1}{\max(\partial_2 \lambda_2 e^{k(w)})},$$

où k est telle que $\partial_1 k = \frac{\partial_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

En posant $H(\rho) = \int^\rho \frac{c(y)}{y} dy$, et

$$w_1 = u - H, \quad w_2 = u + H,$$

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u + c,$$

le système (A) se récrit

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1(w) \partial_x w_1 = 0, \\ \partial_t w_2 + \lambda_2(w) \partial_x w_2 = 0. \end{cases} \quad (E)$$

Théorème

Soient $w_{1,0}, w_{2,0} \in \mathcal{C}^1 \cap \mathbf{W}^{1,\infty}$. Si $w'_{1,0} \geq 0$, $w'_{2,0} \geq 0$ alors la solution classique est globale en temps.

Si $w'_{1,0} \geq 0$, $w'_{2,0} < 0$, on aura existence d'une solution régulière jusqu'au temps

$$T_* = \frac{1}{\max(-w'_{2,0} e^{k(w_0)})} \frac{1}{\max(\partial_2 \lambda_2 e^{k(w)})},$$

où k est telle que $\partial_1 k = \frac{\partial_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

Plan

- 1 Introduction
 - Thermodynamique
 - Propriétés des équations d'Euler
- 2 Temps d'existence des solutions régulières
 - Résultats antérieurs
 - Existence globale pour un gaz de Van der Waals
 - Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien
- 3 Temps d'existence des solutions ondes de choc
 - Résultats antérieurs
 - Construction analytique d'onde de choc
- 4 Approximation d'ondes de choc

- G. Q. Chen (1997) : cas isentropique à symétrie sphérique pour un GPP,
- Li Ta Tsien (1994) : cas isentropique 1D,
- P. Godin (1997) : cas isentropique irrotationnel dans un domaine angulaire.

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Construction analytique d'onde de choc

4 Approximation d'ondes de choc

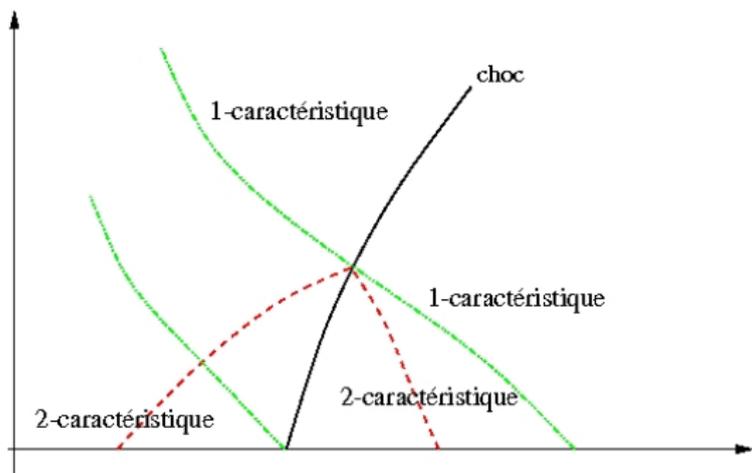


Fig.: Domaine angulaire

Cas isentropique 1D

Théorème

Soient $w_0^- = (w_{1,0}^-, w_{2,0}^-) \in (\mathcal{C}^1 \cap \mathbf{W}^{1,\infty})(]-\infty, x_0])$,

$w_0^+ = (w_{1,0}^+, w_{2,0}^+) \in (\mathcal{C}^1 \cap \mathbf{W}^{1,\infty})([x_0, \infty[)$. Supposons $w_{1,0}^{-\prime} \geq 0$, $w_{2,0}^{-\prime} \leq 0$, $w_{1,0}^{+\prime} \geq 0$, $w_{2,0}^{+\prime} \geq 0$, $\partial_x w_1^+ \geq \partial_x w_2^+$ et que la condition de compatibilité

$$u_0^-(x_0) - u_0^+(x_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0^-(x_0)} - \frac{1}{\rho_0^+(x_0)}\right)(p(\rho_0^+(x_0)) - p(\rho_0^-(x_0)))}$$

est satisfaite en x_0 . Alors on a existence d'une solution onde de choc au moins jusqu'au temps

$$T_* = \frac{1}{\max(-w_{2,0}^{-\prime} e^{k(w_0^-)})} \frac{1}{\max(\partial_2 \lambda_2^- e^{k(w^-)})}.$$

En particulier, si $w_{2,0}^{-\prime} \equiv 0$, alors on a existence globale.

Cas isentropique à symétrie sphérique

Théorème (M.)

Dans le cas de solutions isentropiques à symétrie sphérique, le problème angulaire admet une solution locale si

- $\rho \geq 0$ sur \mathcal{C} et \mathcal{K} ,
- $\partial_t g + U \partial_r g \geq 0$, sur \mathcal{K} ,
- $w_1 \geq 0$ sur \mathcal{K} ,
- $\partial_r w_2 \leq -C$ le long de \mathcal{C}_1 ,
- $\rho_0^-(R_0) > \max(\rho^+)$,

et on dispose d'une estimation du temps d'existence. Dans le cas d'un gaz de Van der Waals, on obtient, si $\partial_r w_2 \leq -C/r$ le long de \mathcal{C}_1 ,

$$T_{\text{ex}} \geq T_* = R_0 C,$$

où C dépend de $\|w^-\|_{L^\infty}$.

Preuve

Dans le cas de la symétrie sphérique, les équations deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1(w) \partial_r w_1 = f(r, w), \\ \partial_t w_2 + \lambda_2(w) \partial_r w_2 = -f(r, w), \end{cases} \quad (\text{F})$$

où $f(r, w) = \frac{(d-1)uc}{r}$.

On estime $w = (w_1, w_2)$ dans $\mathbf{W}^{1,\infty}$ en introduisant $v_2 = e^{k(w)}(\partial_r w_2 + \Phi(r, w))$, où

$$\partial_1 k = \frac{\partial_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \partial_1(e^k \Phi) = \frac{e^k \partial_1 f}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

On obtient l'équation de « type Riccati » le long de la 2-caractéristique :

$$\begin{aligned} \partial_t v_2 + \lambda_2 \partial_r v_2 = & - e^{-k} v_2^2 \partial_2 \lambda_2 + [(\partial_1 k - \partial_2 k) f - \partial_2 f + 2\Phi \partial_2 \lambda_2] v_2 \\ & + e^k [\Phi \partial_2 f - \partial_r f - \Phi^2 \partial_2 \lambda_2 + \lambda_2 \partial_r \Phi + (\partial_1 \Phi - \partial_2 \Phi) f] . \end{aligned}$$

En notant

$$a_0(t) = e^{-k} (\partial_2 \lambda_2) \geq 0 ,$$

$$a_1(t) = (\partial_1 k - \partial_2 k) f - \partial_2 f + 2(\partial_2 \lambda_2) \Phi ,$$

$$a_2(t) = e^k (\partial_2 f \Phi - \partial_r f - \partial_2 \lambda_2 \Phi^2 + \lambda_2 \partial_r \Phi + (\partial_1 \Phi - \partial_2 \Phi) f) ,$$

cette équation se réécrit, en posant $y_2(t) = -v_2(t, \chi_2(t))$,

$$y_2' = a_0 y_2^2 - a_1 y_2 - a_2 .$$

Lemme

Si on a pour $\theta > \alpha$

$$\frac{1 - \int_{\alpha}^{\theta} |a_2(t)| dt \int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp(2 \int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt)}{\int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp(\int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt)} > y_2(\alpha) \geq 0$$

alors l'équation en y_2 de condition initiale $y_2(\alpha) = -v_2(\alpha)$ en $t = \alpha$ a une solution sur $[\alpha, \theta]$.

Vérification de la condition :

$$\int_{\alpha}^{\theta} |a_2(t)| dt \int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp\left(2 \int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt\right) < 1. \quad (G)$$

Soient

$$A_0 = \max(a_0), \quad A_1 = \max |a_1|, \quad A_2 = \max |a_2|, \quad W = \max_{C_1} |\partial_r w_2 + \Phi| e^{k(w)}.$$

On a

$$\int_{\alpha}^{\theta} |a_2(t)| dt \int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp\left(2 \int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt\right) \leq \frac{A_0 A_2}{4A_1^2} 4A_1^2 (\theta - \alpha)^2 e^{2A_1(\theta - \alpha)},$$

Soit $X = 2A_1(\theta - \alpha) \geq 0$ et $x(A_0, A_1, A_2) \geq 0$ l'unique solution sur \mathbb{R}_+ de l'équation

$$x^2 e^x = \frac{4A_1^2}{A_2 A_0}. \quad (H)$$

Comme $x \mapsto x^2 e^x$ est croissante sur \mathbb{R}_+ , $X \leq x(A_0, A_1, A_2)$ implique que la condition (G) est satisfaite. C'est-à-dire que pour tout $\theta \leq T$ tel que

$$\theta \leq T(\alpha) = \alpha + \frac{x(A_0, A_1, A_2)}{2A_1} \quad (I)$$

(G) est satisfaite.

Vérification de la condition :

$$\frac{1 - \int_{\alpha}^{\theta} |a_2(t)| dt \int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp(2 \int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt)}{\int_{\alpha}^{\theta} a_0(t) dt \exp(\int_{\alpha}^{\theta} |a_1(t)| dt)} > y_2(\alpha) \geq 0 \quad (J)$$

De même, on obtient que la condition (J) est vérifiée pour tout $\theta \leq T$ tel que

$$\theta \leq \frac{1}{A_1} \zeta(W, A_0, A_1, A_2).$$

où $\zeta(W, A_0, A_1, A_2)$ l'unique solution de l'équation

$$xe^x = \frac{A_1}{2A_2} \left(W + \sqrt{W^2 + 4A_2/A_0} \right).$$

Plan

- 1 Introduction
 - Thermodynamique
 - Propriétés des équations d'Euler
- 2 Temps d'existence des solutions régulières
 - Résultats antérieurs
 - Existence globale pour un gaz de Van der Waals
 - Méthode des caractéristiques de Li Ta Tsien
- 3 Temps d'existence des solutions ondes de choc
 - Résultats antérieurs
 - Construction analytique d'onde de choc
- 4 Approximation d'ondes de choc

Évolution d'un fluide dans une tuyère

Proposition

Lorsque l'on considère l'évolution d'un gaz de Van der Waals polytropique dans un tube de section variable $A(x)$, on obtient la relation approchée suivante entre le nombre de Mach $M = \frac{U-u_1}{c_1}$ et la section A :

$$f_b(M) \frac{M}{M^2 - 1} \nabla M = -\frac{\nabla A}{A}, \quad (\text{K})$$

où

$$f_b(M) = \left(1 + \frac{2(1 - b\rho_1)(M^2 - 1)m}{M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_1) + 2(1 - b\rho_1)} \right) \left(1 + 2m + \frac{1}{M^2} \right), \quad (\text{L})$$

$$\text{et } m = \sqrt{\frac{M^2(\gamma_0 - 1) + 2}{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}}.$$

Idee de preuve

On cherche une relation entre M et A . Soit $x = X(t)$ la courbe caractéristique d'équation $\frac{dX(t)}{dt} = u(t, X(t)) + c(t, X(t))$ se propageant dans la zone derriere le choc et arrivant au choc en (t_c, x_c) . On obtient alors

$$\left(\frac{1}{c(t, X)} + \frac{1}{u(t, X)} \right) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{d(\rho(t, X))}{dt} + \frac{d(u(t, X))}{dt} \right) = -\frac{1}{A} \frac{d(A(X))}{dt}.$$

En différentiant la vitesse u et la pression p le long du choc dans les conditions de Rankine-Hugoniot, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d(u(t, \chi(t)))}{dt} &= \frac{2c_1(1 - b\rho_1)}{\gamma_0 + 1} \left(1 + \frac{1}{M^2} \right) \frac{d(M(\chi(t)))}{dt}, \\ \frac{d(\rho(t, \chi(t)))}{dt} &= \frac{4\rho_1 c_1^2 (1 - b\rho_1)}{\gamma_0 + 1} M \frac{d(M(\chi(t)))}{dt}. \end{aligned}$$

Idée de preuve

On cherche une relation entre M et A . Soit $x = X(t)$ la courbe caractéristique d'équation $\frac{dX(t)}{dt} = u(t, X(t)) + c(t, X(t))$ se propageant dans la zone derrière le choc et arrivant au choc en (t_c, x_c) . On obtient alors

$$\left(\frac{1}{c(t, X)} + \frac{1}{u(t, X)} \right) \left(\frac{1}{\rho c} \frac{d(p(t, X))}{dt} + \frac{d(u(t, X))}{dt} \right) = -\frac{1}{A} \frac{d(A(X))}{dt}.$$

En différentiant la vitesse u et la pression p le long du choc dans les conditions de Rankine-Hugoniot, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d(u(t, \chi(t)))}{dt} &= \frac{2c_1(1 - b\rho_1)}{\gamma_0 + 1} \left(1 + \frac{1}{M^2} \right) \frac{d(M(\chi(t)))}{dt}, \\ \frac{d(p(t, \chi(t)))}{dt} &= \frac{4\rho_1 c_1^2(1 - b\rho_1)}{\gamma_0 + 1} M \frac{d(M(\chi(t)))}{dt}. \end{aligned}$$

Équation approchée pour la position du choc

On considère un choc à travers une surface de discontinuité

$\Sigma(t) = \{x \in \mathbb{R}^d; \beta(x) - c_1 t = 0\}$, où $\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction supposée régulière et sans point critique.

On définit les *rayons* comme les courbes intégrales du champ $\nu = \frac{\nabla \beta}{|\nabla \beta|}$.

On note $A(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{B_r} 1 d\sigma}{\int_{B_{0,r}} 1 d\sigma} \right)$

Proposition

Pour A défini comme ci-dessus, on a $\nabla \cdot \frac{\nu}{A} = 0$.

Équation approchée pour la position du choc

On considère un choc à travers une surface de discontinuité

$\Sigma(t) = \{x \in \mathbb{R}^d; \beta(x) - c_1 t = 0\}$, où $\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction supposée régulière et sans point critique.

On définit les *rayons* comme les courbes intégrales du champ $\nu = \frac{\nabla \beta}{|\nabla \beta|}$.

On note $A(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\int_{\mathbf{B}_r} 1 d\sigma}{\int_{\mathbf{B}_{0,r}} 1 d\sigma} \right)$

Proposition

Pour A défini comme ci-dessus, on a $\nabla \cdot \frac{\nu}{A} = 0$.

Proposition

On considère une solution onde de choc des équations d'Euler compressibles, la zone devant le choc —indiquée par 1— étant au repos. La surface de discontinuité d'une solution onde de choc des équations d'Euler compressibles étant donnée sous la forme : $\Sigma(t) = \{x \in \mathbb{R}^d; \beta(x) = c_1 t\}$, l'équation vérifiée par β est donnée de manière approchée par :

$$\left(\frac{f_b(1/|\nabla\beta|)}{1 - |\nabla\beta|^2} + 1 \right) \frac{\nabla\beta^T}{|\nabla\beta|} \nabla^2 \beta \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|} = \Delta\beta, \quad (M)$$

où f_b est défini comme en (L).

Proposition

L'équation (M) est strictement hyperbolique tant que $|\nabla\beta| < 1$. Elle est de type elliptique pour $|\nabla\beta| > 1$.

Proposition

On considère une solution onde de choc des équations d'Euler compressibles, la zone devant le choc —indiquée par 1— étant au repos. La surface de discontinuité d'une solution onde de choc des équations d'Euler compressibles étant donnée sous la forme : $\Sigma(t) = \{x \in \mathbb{R}^d; \beta(x) = c_1 t\}$, l'équation vérifiée par β est donnée de manière approchée par :

$$\left(\frac{f_b(1/|\nabla\beta|)}{1 - |\nabla\beta|^2} + 1 \right) \frac{\nabla\beta^T}{|\nabla\beta|} \nabla^2 \beta \frac{\nabla\beta}{|\nabla\beta|} = \Delta\beta, \quad (M)$$

où f_b est défini comme en (L).

Proposition

L'équation (M) est strictement hyperbolique tant que $|\nabla\beta| < 1$. Elle est de type elliptique pour $|\nabla\beta| > 1$.

Proposition

On considère l'équation $A : \nabla^2 \beta = 0$, où

$$A = I_d - (F(|\nabla\beta|) + 1) \frac{\nabla\beta\nabla\beta^\top}{|\nabla\beta|^2},$$

est symétrique réelle et diagonalisable dans une base $Q(x) \in \mathcal{O}_d(\mathbb{R})$ sous la forme

$$Q(x)^\top A(x) Q(x) = \begin{pmatrix} -F(|\nabla\beta|) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

...

Proposition (...)

Alors

- ① l'opérateur $L = A : \nabla^2$ est strictement hyperbolique dans la direction $\nu(x) = Q(x)e_1, \forall x \in \mathbb{R}^d$;
- ② l'application $\psi : (t, x_0) \in \mathbb{R} \times \Sigma_0 \mapsto x_0 + t\mu(x_0)$ est un C^1 -difféomorphisme local en temps qui met l'équation (M) sous la forme

$$\partial_{tt}^2 u - \sum_{j,k \in \{1, \dots, d-1\}} a^{j,k}(t, y, D^1 u) \partial_j \partial_k u = 0,$$

- ③ si de plus, pour tout $x_0 \in \Sigma_0$ l'endomorphisme de Weingarten $W(x_0)$ de Σ_0 en x_0 n'admet que des valeurs propres négatives, alors ψ réalise un difféomorphisme de $\mathbb{R}_+ \times \Sigma_0$ dans $\mathbb{R}^d \setminus \text{Conv}(\Sigma_0)$, où $\text{Conv}(\Sigma_0)$ est l'enveloppe convexe de Σ_0 .

- Etude de l'équation de surface : justification de l'approximation, étude du temps d'existence des solutions,
- Généraliser d'autres résultats aux gaz de Van der Waals,
- Précisions sur le temps d'existence dans la construction analytique,
- Recollement de deux gaz poussiéreux avec deux indices de poussière différents avec une frontière libre à l'interface,
- Stabilité des solutions à symétrie sphérique ?

