

Persistence d'ondes dans les fluides compressibles.

Magali Mercier

Institut Camille Jordan, Lyon

à Grenoble, le 3 décembre 2009

Plan

- 1 Introduction
 - Thermodynamique
 - Propriétés des équations d'Euler
- 2 Temps d'existence des solutions régulières
 - Résultats antérieurs
 - Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- 3 Temps d'existence des solutions ondes de choc
 - Résultats antérieurs
 - Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
 - Construction analytique d'onde de choc

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
- Construction analytique d'onde de choc

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
- Construction analytique d'onde de choc

On s'intéresse aux équations d'Euler compressibles pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (\text{A})$$

où ρ , u , s sont respectivement la densité, la vitesse et l'entropie spécifique du gaz.

De plus on se donne une loi d'état $p : \rho, s \mapsto p(\rho, s)$.

Pour un gaz parfait polytropique (GPP) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \rho^{\gamma_0} \exp(s/c_v),$$

avec $\gamma_0 \in]1, 3]$ et plus particulièrement $\gamma_0 = 5/3, 7/5$ ou $6/5$.

Pour un gaz de Van der Waals (VdW) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\gamma_0} \exp(s/c_v).$$

On s'intéresse aux équations d'Euler compressibles pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (\text{A})$$

où ρ , u , s sont respectivement la densité, la vitesse et l'entropie spécifique du gaz.

De plus on se donne une loi d'état $p : \rho, s \mapsto p(\rho, s)$.

Pour un gaz parfait polytropique (GPP) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \rho^{\gamma_0} \exp(s/c_v),$$

avec $\gamma_0 \in]1, 3]$ et plus particulièrement $\gamma_0 = 5/3, 7/5$ ou $6/5$.

Pour un gaz de Van der Waals (VdW) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\gamma_0} \exp(s/c_v).$$

On s'intéresse aux équations d'Euler compressibles pour des solutions régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases} \quad (\text{A})$$

où ρ , u , s sont respectivement la densité, la vitesse et l'entropie spécifique du gaz.

De plus on se donne une loi d'état $p : \rho, s \mapsto p(\rho, s)$.

Pour un gaz parfait polytropique (GPP) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \rho^{\gamma_0} \exp(s/c_v),$$

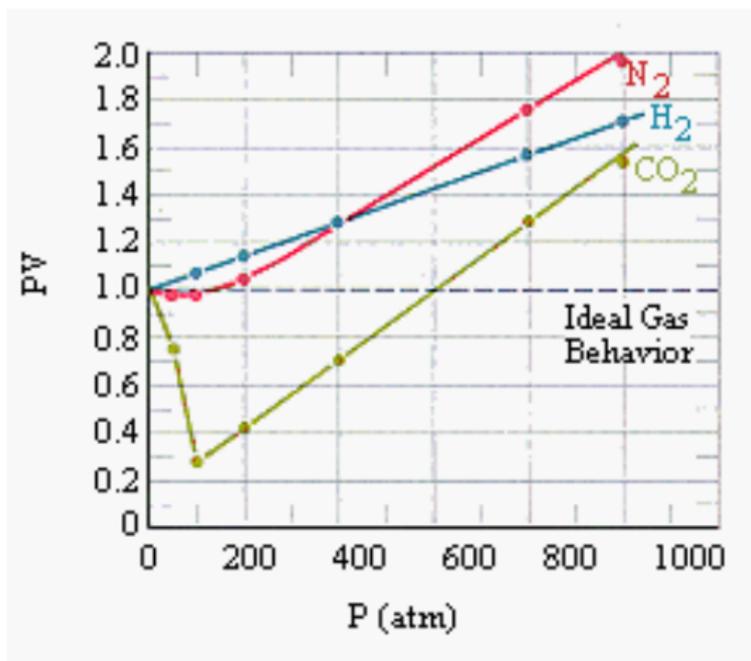
avec $\gamma_0 \in]1, 3]$ et plus particulièrement $\gamma_0 = 5/3, 7/5$ ou $6/5$.

Pour un gaz de Van der Waals (VdW) :

$$p = (\gamma_0 - 1) \left(\frac{\rho}{1 - b\rho} \right)^{\gamma_0} \exp(s/c_v).$$

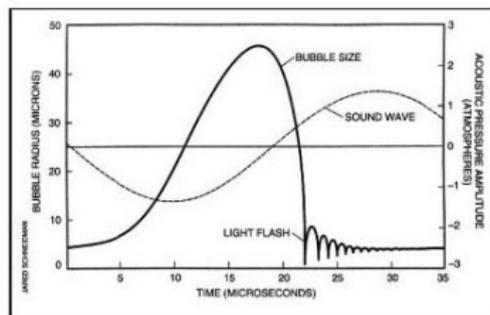
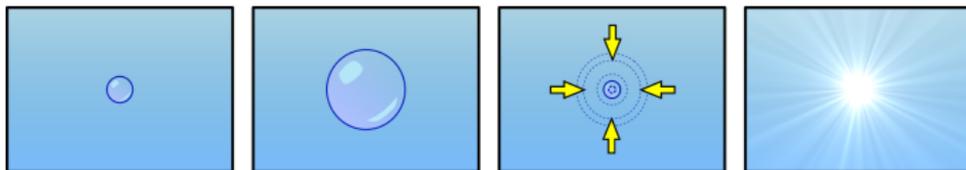
Gaz	He	Ne	H ₂	CO ₂	Vapeur d'eau
b (cm ³ /mol)	23.71	17.10	26.61	42.69	30.52

Tab.: van der Waals Coefficients, Data from Fishbane, et al.



Sonoluminescence

Wu & Roberts (1995) étudient les ondes de choc sphériques dans un gaz de Van der Waals afin de modéliser le phénomène de sonoluminescence. Quand la bulle se rétracte, on pense que la pression atteint 200Mbars.



Objectifs

On aimerait construire des solutions à symétrie sphérique ayant un long temps d'existence pour un gaz de VdW/gaz poussiéreux.

- Trouver des solutions régulières globales en temps pour un gaz de VdW ;
- Juxtaper deux solutions régulières le long d'une ligne de discontinuité.

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
- Construction analytique d'onde de choc

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

• Dans le cas général, en dehors du vide, dans les variables (ρ, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

• Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (x, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t x + u \cdot \nabla x + \frac{2\alpha}{\gamma} (1 + \beta \alpha \frac{\gamma}{\gamma-1} x^{\gamma-1}) \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \alpha \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{2\alpha}{\gamma} (1 + \beta \alpha \frac{\gamma}{\gamma-1} x^{\gamma-1}) \rho \nabla x + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (8)$$

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (ρ, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{\pi}{\gamma_0 c_v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{-\frac{\pi}{\gamma_0 c_v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{\pi}{\gamma_0 c_v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (\text{B})$$

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (p, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t p + u \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{\frac{s}{\gamma_0 c v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (\text{B})$$

$$c^2 = \gamma - 2 \sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1}} \left(\frac{p}{\rho} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2}} \tilde{b} - b \left(\frac{p}{\rho} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2}} \pi^{\nu-1} \pi^{\frac{1}{\nu}} = \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_0 + 1} > 1$$

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (p, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t p + u \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{\frac{s}{\gamma_0 c v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (\text{B})$$

avec $\pi = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{p}{\gamma_0 - 1} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}}$, $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0 - 1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}}$ et $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} > 1$.

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (p, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t p + u \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{\frac{s}{\gamma_0 c v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{-\frac{s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (\text{B})$$

avec $\pi = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{p}{\gamma_0 - 1} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}}$, $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0 - 1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}}$ et $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} > 1$.

① Hyperbolicité, sous l'hypothèse $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s > 0$. On peut alors poser $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$.

② Symétrisabilité

- Dans le cas général, en-dehors du vide, dans les variables (p, u, s) le système s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t p + u \cdot \nabla p + c^2 \rho \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + \frac{1}{\rho} \nabla p + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0. \end{cases}$$

- Pour un gaz de Van der Waals, on adapte la symétrisation de Makino, Ukai & Kawashima (valable pour un GPP). Le système s'écrit, en variables (π, u, s) ,

$$\begin{cases} \partial_t \pi + u \cdot \nabla \pi + \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \operatorname{div} u = 0, \\ \partial_t u + e^{\frac{s}{\gamma_0 c v}} \frac{\gamma_0 - 1}{2} (1 + \tilde{b} e^{\frac{-s}{\gamma_0 c v}} \pi^{\nu-1}) \pi \nabla \pi + (u \cdot \nabla) u = 0, \\ \partial_t s + u \cdot \nabla s = 0, \end{cases} \quad (\text{B})$$

avec $\pi = 2 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\gamma_0 - 1}} \left(\frac{p}{\gamma_0 - 1} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}}$, $\tilde{b} = b \left(\frac{\gamma_0 - 1}{4\gamma_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0 - 1}}$ et $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1} > 1$.

Existence locale : Solutions régulières

Théorème

Le problème de Cauchy pour (A) avec les conditions initiales

$(\rho_0, u_0, s_0) \in (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{s}) + \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ pour $\bar{\rho} > 0$ et $m > 1 + \frac{d}{2}$ admet une solution classique $(\rho, u, s) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ avec $T > 0$.

Théorème

On considère un gaz de Van der Waals à c_v constant. Le problème de Cauchy (B) avec les conditions initiales $(\pi_0, u_0, s_0) \in \mathbf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ pour $m > 1 + d/2$ admet une solution classique $(\pi, u, s) \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^d)$ avec $T > 0$.

Existence locale : Solutions régulières par morceaux

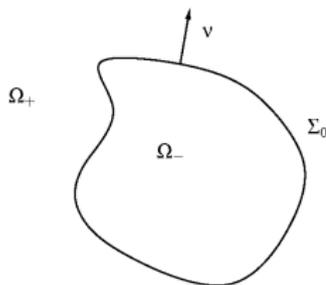


Fig.: Surface de discontinuité.

Conditions de Rankine-Hugoniot :

$$\begin{cases} -U[\rho] + [\rho(u \cdot \nu)] = 0, \\ -U[\rho u] + [\rho(u \cdot \nu)u + p\nu] = 0, \\ -U[\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e] \\ \quad + [(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e)(u \cdot \nu) + p(u \cdot \nu)] = 0, \end{cases} \quad (C)$$

Condition de choc de Lax

$$u_0^+ \cdot \nu + \sqrt{\partial_\rho p(\rho_0^+)} < U < u_0^- \cdot \nu + \sqrt{\partial_\rho p(\rho_0^-)} \quad (D)$$

Théorème (Majda)

Soit Σ_0 une courbe C^∞ compacte de \mathbb{R}^2 séparant l'espace en deux parties Ω_- (bornée) et Ω_+ (non-bornée). Soient $(\rho_0^-, u_0^-) \in \mathbf{H}^m(\Omega_-)$ et $(\rho_0^+, u_0^+) \in \mathbf{H}^m(\Omega_+ \cap B(0, R_0))$ pour $m \geq 10$. On suppose qu'il existe une fonction $U \in \mathbf{H}^m(\Sigma_0)$ de sorte que

- les conditions de Rankine-Hugoniot sont satisfaites sur Σ_0 pour U ,
- des conditions de compatibilité sont satisfaites sur Σ_0 ,
- la condition de Lax est satisfaite,
- la condition de stabilité suivante est satisfaite :

$$\frac{[p(\rho)]}{[\rho]} < \partial_\rho p(\rho_0^-(\alpha)) + (u_0^-(\alpha) \cdot \nu - U(\alpha))^2, \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma_0.$$

Alors il existe $T > 0$, une hypersurface C^2 , $\Sigma(t)$ définie pour $t \in [0, T]$, \mathbf{H}^{m+1} par rapport à t , et une solution C^1 par morceaux satisfaisant les équations d'Euler isentropique de part et d'autre de $\Sigma(t)$, les conditions de Rankine-Hugoniot (C) et de choc de Lax (D) au niveau de $\Sigma(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Plan

- 1 Introduction
 - Thermodynamique
 - Propriétés des équations d'Euler
- 2 Temps d'existence des solutions régulières
 - Résultats antérieurs
 - Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- 3 Temps d'existence des solutions ondes de choc
 - Résultats antérieurs
 - Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
 - Construction analytique d'onde de choc

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
- Construction analytique d'onde de choc

Critères d'explosions ne précisant pas le temps d'explosion

- T. C. Sideris (1985) : GPP de densité $\rho \geq \bar{\rho} > 0$, gaz dans une boule, comprimé, à vitesse sortante.
- T. Makino, S. Ukai & S. Kawashima (1986) : GPP, (ρ_0, u_0) à support compact.
- J.-Y. Chemin (1990) : GPP isentropique 1D, sous les hypothèses

$$\begin{aligned}
 (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0) &\in \mathbf{H}_{ul}^m, && \text{pour } m > 3/2, \\
 x^2 \rho_0 &\in \mathbf{L}^1, \\
 |u_0(x)| &\leq \frac{2}{\gamma-1} c_0.
 \end{aligned}$$

Cas d'existence presque globale, en symétrie sphérique

- Q. Qiu & H. Yin (1999) : cas isentropique
- P. Godin (2005) : cas général

Soit $\bar{\rho} > 0$. Pour des conditions initiales de la forme

$$\rho_0(r) = \bar{\rho} + \varepsilon \rho_1(r), \quad u_0(r) = \varepsilon u_1(r), \quad s_0(r) = \bar{s} + \varepsilon u_1(r),$$

alors le problème de Cauchy (A) pour ces conditions initiales admet une solution régulière jusqu'au temps

$$\ln T_\varepsilon \sim \left(\frac{\tau}{\varepsilon} \right)$$

Cas d'existence globale

Solutions stationnaires,

Cas isentropique 1D : Li Ta Tsien (1981), s'inspire du cas scalaire.

En posant $H(\rho) = \int^\rho \frac{c(y)}{y} dy$, et

$$\begin{aligned} w_1 &= u - H, & w_2 &= u + H, \\ \lambda_1 &= u - c, & \lambda_2 &= u + c, \end{aligned}$$

le système (A) se récrit

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1(w) \partial_x w_1 = 0, \\ \partial_t w_2 + \lambda_2(w) \partial_x w_2 = 0. \end{cases} \quad (\text{E})$$

Théorème

Soient $w_{1,0}, w_{2,0} \in C^1 \cap W^{1,\infty}$. Si $w'_{1,0} \geq 0$, $w'_{2,0} \geq 0$ alors la solution classique est globale en temps.

Si $w'_{1,0} \geq 0$, $w'_{2,0} < 0$, on aura existence d'une solution régulière au moins jusqu'au temps

$$T_* = \frac{1}{\max(-w'_{2,0} e^{k(w_0)})} \frac{1}{\max(\partial_2 \lambda_2 e^{k(w)})},$$

où k est telle que $\partial_1 k = \frac{\partial_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

En posant $H(\rho) = \int^\rho \frac{c(y)}{y} dy$, et

$$\begin{aligned} w_1 &= u - H, & w_2 &= u + H, \\ \lambda_1 &= u - c, & \lambda_2 &= u + c, \end{aligned}$$

le système (A) se récrit

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1(w) \partial_x w_1 = 0, \\ \partial_t w_2 + \lambda_2(w) \partial_x w_2 = 0. \end{cases} \quad (E)$$

Théorème

Soient $w_{1,0}, w_{2,0} \in \mathcal{C}^1 \cap \mathbf{W}^{1,\infty}$. Si $w'_{1,0} \geq 0$, $w'_{2,0} \geq 0$ alors la solution classique est globale en temps.

Si $w'_{1,0} \geq 0$, $w'_{2,0} < 0$, on aura existence d'une solution régulière au moins jusqu'au temps

$$T_* = \frac{1}{\max(-w'_{2,0} e^{k(w_0)})} \frac{1}{\max(\partial_2 \lambda_2 e^{k(w)})},$$

où k est telle que $\partial_1 k = \frac{\partial_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Existence globale dans le cas multidimensionnel

- D. Serre (1997) : GPP. Soit $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, matrice n'admettant pas de valeurs propres réelle négative. Si $\bar{u}_0(x) = A_0 x$, $\bar{s} \in \mathbb{R}$ et

$$\left\| (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0 - \bar{u}_0, s_0 - \bar{s}) \right\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon,$$

alors la solution classique est globale.

- M. Grassin (1998) : GPP, Hypothèses : ρ_0, s_0 à support compact, $Du_0 \in \mathbf{L}^\infty$, $D^2 u_0 \in \mathbf{H}^{m-1}$ et

$$\left\| (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, s_0) \right\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon,$$

$$\text{dist}(\text{Spec}(Du_0), \mathbb{R}^-) \geq \delta > 0.$$

Existence globale dans le cas multidimensionnel

- D. Serre (1997) : GPP. Soit $A_0 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, matrice n'admettant pas de valeurs propres réelle négative. Si $\bar{u}_0(x) = A_0 x$, $\bar{s} \in \mathbb{R}$ et

$$\left\| (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, u_0 - \bar{u}_0, s_0 - \bar{s}) \right\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon,$$

alors la solution classique est globale.

- M. Grassin (1998) : GPP, Hypothèses : ρ_0, s_0 à support compact, $Du_0 \in \mathbf{L}^\infty$, $D^2 u_0 \in \mathbf{H}^{m-1}$ et

$$\left\| (\rho_0^{(\gamma-1)/2}, s_0) \right\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon,$$

$$\text{dist}(\text{Spec}(Du_0), \mathbb{R}^-) \geq \delta > 0.$$

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
- Construction analytique d'onde de choc

Théorème (M.)

On considère un gaz de Van der Waals, tel que (π_0, u_0, s_0) soient les conditions initiales associées au système (B). Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1}$ et

- $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$,
- $\|(\pi_0, s_0)\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon_0$, où $m > 1 + d/2$, et π_0, s_0 sont à support compact,
- $Du_0 \in \mathbf{L}^\infty$, $D^2 u_0 \in \mathbf{H}^{m-1}$,
- $\text{dist}(\text{Spec}(Du_0), \mathbb{R}^-) \geq \delta > 0$,

alors il existe une solution classique globale.

Rques :

- La 1ère condition revient à : $\gamma_0 \in]1, \frac{m+1}{m-1}] \cup \{\frac{n+1}{n-1} ; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.
- Ce théorème peut en particulier s'appliquer pour des conditions initiales à symétrie sphérique.

Théorème (M.)

On considère un gaz de Van der Waals, tel que (π_0, u_0, s_0) soient les conditions initiales associées au système (B). Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, si $\nu = \frac{\gamma_0 + 1}{\gamma_0 - 1}$ et

- $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$,
- $\|(\pi_0, s_0)\|_{\mathbf{H}^m} \leq \varepsilon_0$, où $m > 1 + d/2$, et π_0, s_0 sont à support compact,
- $Du_0 \in \mathbf{L}^\infty$, $D^2 u_0 \in \mathbf{H}^{m-1}$,
- $\text{dist}(\text{Spec}(Du_0), \mathbb{R}^-) \geq \delta > 0$,

alors il existe une solution classique globale.

Rques :

- La 1ère condition revient à : $\gamma_0 \in]1, \frac{m+1}{m-1}] \cup \{\frac{n+1}{n-1}; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$.
- Ce théorème peut en particulier s'appliquer pour des conditions initiales à symétrie sphérique.

Idée de preuve

Comme M. Grassin, on introduit un problème approché

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = 0, \quad \bar{u}(0, x) = u_0(x).$$

On se place tout d'abord dans le cas isentropique. Le système s'écrit

$$\partial_t U + \sum_j A_j(U) = B(\bar{u}, D\bar{u}, U, DU) + F(D\bar{u}, U, DU)$$

où $U = (\rho, u - \bar{u})$ et

$$F(D\bar{u}, U, DU) = -\frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^\nu \begin{pmatrix} \operatorname{div} u \\ \nabla \pi \end{pmatrix}.$$

Pour estimer $\int_{\mathbb{R}^d} D^k U \cdot D^k (F(D\bar{u}, U, DU))$, on a besoin du lemme :

Lemme

Soit $f \in L^\infty \cap H^m$. Si $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$, alors $f^\nu \in H^m$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k \leq m$ on a

$$\|\partial^\alpha (f^\nu)\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^\infty}^{\nu-1} \|D^k f\|_{L^2}.$$

Idée de preuve

Comme M. Grassin, on introduit un problème approché

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = 0, \quad \bar{u}(0, x) = u_0(x).$$

On se place tout d'abord dans le cas isentropique. Le système s'écrit

$$\partial_t U + \sum_j A_j(U) = B(\bar{u}, D\bar{u}, U, DU) + F(D\bar{u}, U, DU)$$

où $U = (\rho, u - \bar{u})$ et

$$F(D\bar{u}, U, DU) = -\frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^\nu \left(\begin{array}{c} \operatorname{div} u \\ \nabla \pi \end{array} \right).$$

Pour estimer $\int_{\mathbb{R}^d} D^k U \cdot D^k (F(D\bar{u}, U, DU))$, on a besoin du lemme :

Lemme

Soit $f \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{H}^m$. Si $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$, alors $f^\nu \in \mathbf{H}^m$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k \leq m$ on a

$$\|\partial^\alpha (f^\nu)\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^\infty}^{\nu-1} \|D^k f\|_{L^2}.$$

Idée de preuve

Comme M. Grassin, on introduit un problème approché

$$\partial_t \bar{u} + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} = 0, \quad \bar{u}(0, x) = u_0(x).$$

On se place tout d'abord dans le cas isentropique. Le système s'écrit

$$\partial_t U + \sum_j A_j(U) = B(\bar{u}, D\bar{u}, U, DU) + F(D\bar{u}, U, DU)$$

où $U = (\rho, u - \bar{u})$ et

$$F(D\bar{u}, U, DU) = -\frac{\gamma_0 - 1}{2} \tilde{b} \pi^\nu \left(\begin{array}{c} \operatorname{div} u \\ \nabla \pi \end{array} \right).$$

Pour estimer $\int_{\mathbb{R}^d} D^k U \cdot D^k (F(D\bar{u}, U, DU))$, on a besoin du lemme :

Lemme

Soit $f \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{H}^m$. Si $\nu \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ou $\nu \in [m, +\infty[$, alors $f^\nu \in \mathbf{H}^m$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| = k \leq m$ on a

$$\|\partial^\alpha (f^\nu)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|f\|_{\mathbf{L}^\infty}^{\nu-1} \|D^k f\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Plan

- 1 Introduction
 - Thermodynamique
 - Propriétés des équations d'Euler
- 2 Temps d'existence des solutions régulières
 - Résultats antérieurs
 - Existence globale pour un gaz de Van der Waals
- 3 Temps d'existence des solutions ondes de choc
 - Résultats antérieurs
 - Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
 - Construction analytique d'onde de choc

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
- Construction analytique d'onde de choc

- G. Q. Chen (1997) : existence globale de solutions faibles entropiques dans le cas isentropique à symétrie sphérique pour $0 \leq \pi_0 \leq u_0 < \infty$, GPP,
- Li Ta Tsien (1994) : cas isentropique 1D
- P. Godin (1997) : cas isentropique irrotationnel dans un domaine angulaire,

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- **Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts**
- Construction analytique d'onde de choc

- └ Temps d'existence des solutions ondes de choc
- └ Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts

On pose $\xi = \frac{r}{|t|^\alpha}$. De même que R. F. Chisnell ou G. B. Whitham, on introduit les inconnues adimensionnées $(w, y, z) : \rho = \rho_1 w$, $u = \frac{\alpha r}{t} y$ et $c^2 = \left(\frac{\alpha r}{t}\right)^2 z$, où α est une constante à déterminer.

- Explosion : $\alpha = 2/5$ (analyse dimensionnelle : $\left(\frac{Et^2}{\rho_+}\right)^{1/5}$ homogène à une distance).
- Focalisation, on ne connaît pas la valeur de α .

Le système devient, pour un gaz de VdW, avec $U = (\ln w, y, z)$ et $\zeta = \ln \xi$,

$$A(w, y, z) \times \frac{dU}{d\zeta} = B(U), \quad (F)$$

où

$$A(w, y, z) = \begin{pmatrix} y - 1 & 1 & 0 \\ \frac{z}{\gamma_0}(1 - 2b\rho_+ w) & y - 1 & \frac{1}{\gamma_0}(1 - b\rho_+ w) \\ 0 & z \frac{1 - \gamma_0 - 2b\rho_+ w}{1 - b\rho_+ w} & -(y - 1) \end{pmatrix}, \quad (G)$$

$$B(w, y, z) = \begin{pmatrix} -dy \\ -y(y - \frac{1}{\alpha}) - \frac{2z}{\gamma_0}(1 - b\rho_+ w) \\ 2z(y - \frac{1}{\alpha}) - dyz \frac{1 - \gamma_0 - 2b\rho_+ w}{1 - b\rho_+ w} \end{pmatrix}. \quad (H)$$

Dans le cas d'un gaz de Van der Waals, on est vraiment avec 3 inconnues, deux seulement pour un gaz parfait.

Le système devient, pour un gaz de VdW, avec $U = (\ln w, y, z)$ et $\zeta = \ln \xi$,

$$A(w, y, z) \times \frac{dU}{d\zeta} = B(U), \quad (F)$$

où

$$A(w, y, z) = \begin{pmatrix} y - 1 & 1 & 0 \\ \frac{z}{\gamma_0}(1 - 2b\rho_+ w) & y - 1 & \frac{1}{\gamma_0}(1 - b\rho_+ w) \\ 0 & z \frac{1 - \gamma_0 - 2b\rho_+ w}{1 - b\rho_+ w} & -(y - 1) \end{pmatrix}, \quad (G)$$

$$B(w, y, z) = \begin{pmatrix} -dy \\ -y(y - \frac{1}{\alpha}) - \frac{2z}{\gamma_0}(1 - b\rho_+ w) \\ 2z(y - \frac{1}{\alpha}) - dyz \frac{1 - \gamma_0 - 2b\rho_+ w}{1 - b\rho_+ w} \end{pmatrix}. \quad (H)$$

Dans le cas d'un gaz de Van der Waals, on est vraiment avec 3 inconnues, deux seulement pour un gaz parfait.

Les conditions de Rankine-Hugoniot donnent les conditions initiales en $\xi = 1$, en supposant que devant le choc le gaz est dans l'état constant $(\rho_+, 0, c_+)$:

$$w(1) = \frac{M^2(\gamma_0 + 1)}{M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_+) + 2(1 - b\rho_+)}, \quad (\text{I})$$

$$y(1) = \frac{2(1 - b\rho_+)(M^2 - 1)}{(\gamma_0 + 1)M^2}, \quad (\text{J})$$

$$z(1) = \frac{(M^2(\gamma_0 - 1 + 2b\rho_+) + 2(1 - b\rho_+))^2}{M^4(\gamma_0 + 1)^2} \frac{2\gamma_0 M^2 - (\gamma_0 - 1)}{M^2(\gamma_0 - 1) + 2}. \quad (\text{K})$$

Dans la limite $M = \frac{U - u_+}{c_+} = \frac{U}{c_+} \gg 1$, ces conditions sont des constantes. On doit alors résoudre un problème de Cauchy.

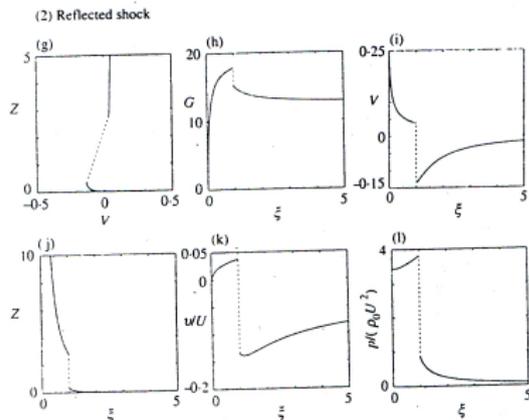
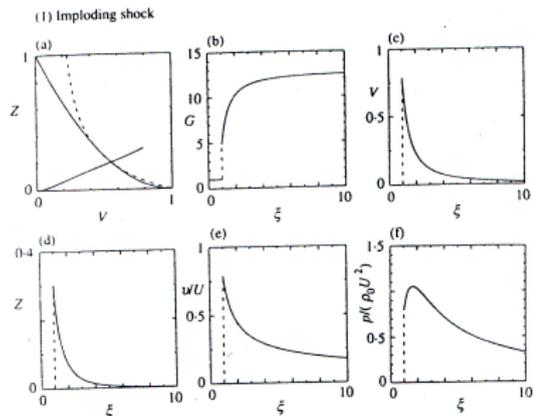


FIG. 2. The similarity solution of Guderley type for an implosion in which imperfections of the gas are slight ($\delta = 0.05$, $\gamma = \frac{1}{3}$). For an explanation of the panels see the legend to Fig. 1

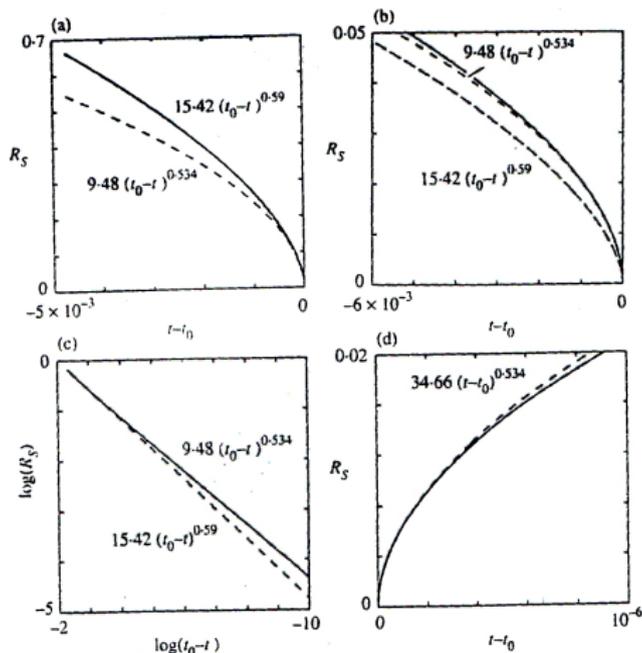


FIG. 11. Detailed comparison of the shock position as a function of time for the same case as Fig. 9; the piston solution is the full curve and the similarity solution is the dashed curve. Panels (a) to (c) show the path of the incoming shock; it is noteworthy how the solution (full curves) switches quite suddenly from one similarity structure to the correct exponent (dashed curves) as the shock approaches the origin. Panel (d) shows that the reflected shock path (full curve) follows the correct similarity path (dashed curve) as it leaves the origin

Plan

1 Introduction

- Thermodynamique
- Propriétés des équations d'Euler

2 Temps d'existence des solutions régulières

- Résultats antérieurs
- Existence globale pour un gaz de Van der Waals

3 Temps d'existence des solutions ondes de choc

- Résultats antérieurs
- Solution autosimilaire dans la limite des chocs forts
- Construction analytique d'onde de choc

Cas isentropique 1D

Théorème

Soient $w_0^- = (w_{1,0}^-, w_{2,0}^-) \in (\mathcal{C}^1 \cap \mathbf{W}^{1,\infty})(]-\infty, x_0])$,

$w_0^+ = (w_{1,0}^+, w_{2,0}^+) \in (\mathcal{C}^1 \cap \mathbf{W}^{1,\infty})([x_0, \infty[)$. Supposons $w_{1,0}^{-\prime} \geq 0$, $w_{2,0}^{-\prime} \leq 0$, $w_{1,0}^{+\prime} \geq 0$, $w_{2,0}^{+\prime} \geq 0$, $\partial_x w_1^+ \geq \partial_x w_2^+$ et que la condition de compatibilité

$$u_0^-(x_0) - u_0^+(x_0) = \sqrt{\left(\frac{1}{\rho_0^-(x_0)} - \frac{1}{\rho_0^+(x_0)}\right)(p(\rho_0^+(x_0)) - p(\rho_0^-(x_0)))}$$

est satisfaite en x_0 . Alors on a existence d'une solution onde de choc jusqu'au temps

$$T_* = \frac{1}{\max(-w_{2,0}^{-\prime} e^{k(w_0^-)})} \frac{1}{\max(\partial_2 \lambda_2^- e^{k(w^-)})}$$

En particulier, si $w_{2,0}^{-\prime} \equiv 0$, alors on a existence globale.

Idée de Preuve

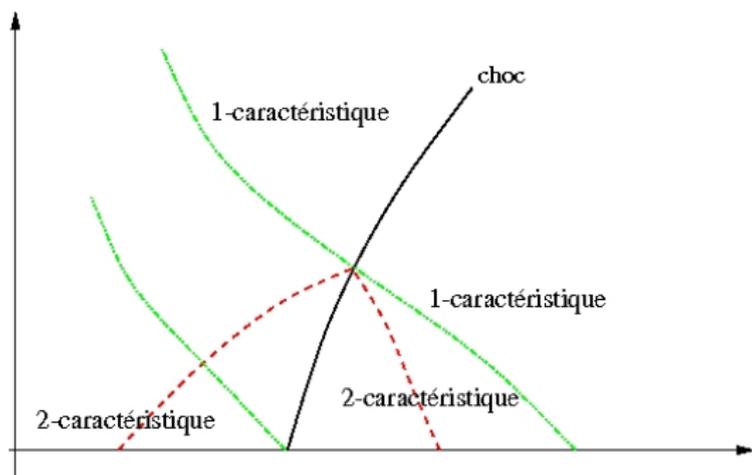


Fig.: Domaine angulaire

Cas isentropique à symétrie sphérique

Théorème (M.)

Dans le cas de solutions isentropiques à symétrie sphérique, le problème angulaire admet une solution locale si

- $\rho \geq 0$ sur \mathcal{C} et \mathcal{K} ,
- $\partial_t g + U \partial_r g \geq 0$, sur \mathcal{K} ,
- $w_1 \geq 0$ sur \mathcal{K} ,
- $\partial_r w_2 \leq -C$ le long de \mathcal{C}_1 ,
- $\rho_0^-(R_0) > \max(\rho^+)$,

et on dispose d'une estimation du temps d'existence. Dans le cas d'un gaz de Van der Waals, on obtient

$$T_{\text{ex}} \geq T_* = R_0 C,$$

où C dépend de $\|w^-\|_{L^\infty}$

Preuve

Dans le cas de la symétrie sphérique, les équations deviennent :

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + \lambda_1(w) \partial_r w_1 = f(r, w), \\ \partial_t w_2 + \lambda_2(w) \partial_r w_2 = -f(r, w), \end{cases} \quad (\text{L})$$

où $f(r, w) = \frac{(d-1)uc}{r}$.

On estime $w = (w_1, w_2)$ dans $\mathbf{W}^{1,\infty}$ en introduisant $v_2 = e^{k(w)}(\partial_r w_2 + \Phi(r, w))$, où

$$\partial_1 k = \frac{\partial_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad \partial_1(e^k \Phi) = \frac{e^k \partial_1 f}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

On obtient l'équation de « type Riccati » le long de la 2-caractéristique :

$$\begin{aligned} \partial_t v_2 + \lambda_2 \partial_r v_2 = & -e^{-k} v_2^2 \partial_2 \lambda_2 + [(\partial_1 k - \partial_2 k) f - \partial_2 f + 2\Phi \partial_2 \lambda_2] v_2 \\ & + e^k [\Phi \partial_2 f - \partial_r f - \Phi^2 \partial_2 \lambda_2 + \lambda_2 \partial_r \Phi + (\partial_1 \Phi - \partial_2 \Phi) f] . \end{aligned}$$

En notant

$$a_0(t) = e^{-k} (\partial_2 \lambda_2) \geq 0 ,$$

$$a_1(t) = (\partial_1 k - \partial_2 k) f - \partial_2 f + 2(\partial_2 \lambda_2) \Phi ,$$

$$a_2(t) = e^k (\partial_2 f \Phi - \partial_r f - \partial_2 \lambda_2 \Phi^2 + \lambda_2 \partial_r \Phi + (\partial_1 \Phi - \partial_2 \Phi) f) ,$$

cette équation se réécrit, en posant $y_2(t) = -v_2(t, \chi_2(t))$,

$$y_2' = a_0 y_2^2 - a_1 y_2 - a_2 .$$



Précision sur le temps d'existence dans la construction analytique.
Stabilité des solutions à symétrie sphérique ?

