ENS-Lyon - Automne 2009
1ère année - Introduction à l'Analyse Numérique

Planche n^o 2

Autour de la résolution de $f(x) = 0$: analyse et résolution numérique.

Exercice 1 *Sur le comportement qualitatif au voisinage du point fixe*

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet un point fixe $a \in I$.

1. Sous l'hypothèse $|f'(a)| < 1$: montrer qu'il existe un intervalle fermé J centré en a qui est stable par f et déterminer la convergence de la suite $\{x_n\}_n$ définie par
$$\begin{cases} x_0 \in J \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} . \tag{1}$$
2. Supposons de plus que f' ne s'annule pas sur J. Montrer que si $x_0 \neq a$ alors :
$$\begin{cases} \forall n, \quad x_n \neq a \quad \text{et} \\ x_{n+1} - a \quad \overset{n\to\infty}{\sim} \quad f'(a)(x_n - a) \end{cases} . \tag{2}$$
On parle, dans ce cas, de convergence à l'ordre 1 ou convergence géométrique.
3. Supposons maintenant que f
(i) vérifie l'hypothèse de la question 1.
(ii) est de classe $\mathcal{C}^2$
(iii) est telle que $f'(a) = 0$
(iv) est telle que f'' ne s'annule pas sur J.
Montrer que si un élément x_0 de J est différent de a, alors :
$$\begin{cases} \forall n, \quad x_n \neq a \quad \text{et} \\ x_{n+1} - a \quad \overset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{f''(a)}{2} (x_n - a)^2 \end{cases} . \tag{3}$$
Commentez ce résultat.
4. On suppose ici que $|f'(a)| > 1$. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J centré en a tel que pour un x_0 quelconque dans J, différent de a, la suite $\{x_n\}_n$ s'échappe de J.

Exercice 2 *Méthode de Newton pour la résolution de $f(x) = 0$*

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, d'un compact I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $I = [u, v]$ et on suppose que :
$$(i) \quad u < v \qquad (ii) \quad f(u) < 0 < f(v) \qquad (iii) \quad \forall x \in I,\ f'(x) > 0. \tag{4}$$
On considère alors la méthode itérative $x_{n+1} = P(x_n)$ définie par
$$P(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{5}$$

1. Montrer que f a un unique zéro que l'on notera a. Etablir que :

$$\forall\, x \in I, \quad \exists\, y \in (a, x), \quad P(x) - a = \frac{1}{2}\, \frac{f''(y)}{f'(x)}\, (x-a)^2. \tag{6}$$

2. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall\, x \in I, \quad |P(x) - a| \;\; \leq \;\; \lambda\, |x-a|^2$$

   et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $J = [\ a-\alpha\ ;\ a+\alpha\ ]$ soit stable par P. Etablir que, pour tout $x_0 \in J$, la suite $\{x_n\}_n$ converge quadratiquement vers a.
3. Nous supposons enfin que $f'' > 0$ sur I. Montrer que $K = [a, v]$ est stable par P. Etablir que, pour tout $x_0 \in K$, la suite $\{x_n\}_n$ est strictement décroissante ou constante et vérifie

$$0 \;\; \leq \;\; x_{n+1} - a \;\; \leq \;\; \lambda\, (x_n - a)^2 \tag{7}$$

$$\text{et en supposant que } x_0 > a, \quad x_{n+1} - a \;\; \overset{n\to\infty}{\sim} \;\; \frac{f''(a)}{2f'(a)}\, (x_n - a)^2 \tag{8}$$

4. *Illustration* : Soit $\omega > 0$ et $f(x) = x^2 - \omega$. Déterminer les itérés et estimer l'erreur $x_n - a$ pour la racine positive $\sqrt{\omega}$ (Indication : exhiber une relation de récurrence sur $(x_n - a)/(x_n + a)$).
5. Commentez la methode de Newton à l'aide de l'Exercice 1 et donnez en une interprétation géométrique.

Exercice 3 *Méthode de la sécante*

La méthode de la sécante est une variante de la méthode de Newton dans laquelle la dérivée $f'(x_n)$ est remplacée par le taux d'accroissement : $\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$.

Soit $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose $u < v$, et a un zéro de f tel que $f'(a) \neq 0$. Comme annoncé, on considère la méthode itérative $x_{n+1} = P(x_n, x_{n-1}), n > 0$ avec

$$P(x, y) = x - \frac{f(x)(x-y)}{f(x) - f(y)}. \tag{9}$$

1. Montrer qu'il existe un intervalle fermé J centré en a tel que, pour $(x_0, x_1) \in J^2$, la suite construite par la formule précédente soit correctement définie. Etudier alors cette suite.
2. On suppose de plus que $f''(a) \neq 0$ et on pose $e_n = x_n - a$. Quitte à restreindre J, montrer qu'il existe $C > 0$, $\kappa \in]0, 1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \;\; n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |e_n| \;\; \leq \;\; C\, \kappa^{\varphi^n}$$

   avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. Comparer cette méthode à celle de Newton et commenter.