

Mémoire de stage de M2-R.
**Équations d'Euler à symétrie sphérique,
focalisation d'ondes de choc dans les fluides réels.**

Magali Mercier,
sous la direction de Sylvie Benzoni-Gavage*

12 septembre 2005

*Membre de *l'Institut Camille Jordan*, laboratoire de mathématiques et applications de l'université Claude Bernard (Lyon 1).

Remerciements.

Je voudrais remercier chaleureusement l'ensemble du laboratoire de mathématiques de l'université Claude Bernard (Lyon I), *l'Institut Camille Jordan*, dirigé par Thierry Fack, pour m'avoir accueillie et encadrée. Plus particulièrement, je tiens à remercier mon maître de stage, Sylvie Benzoni-Gavage, pour m'avoir accordée son attention et son temps, mais aussi pour m'avoir permis d'aller à l'école d'été sur la *Dynamique des équations aux dérivées partielles non-linéaires* organisée à l'*Institut Fourier* de Grenoble par Thierry Gallay, ce qui fut une expérience très enrichissante.

Introduction.

L'étude de la mécanique des fluides a commencé au XVIII^e siècle avec les travaux d'Euler [1707-1783] et de d'Alembert [1717-1783], qui développèrent en particulier la théorie de la propagation du son. Concernant la propagation des ondes de choc, les premiers travaux importants sont dûs à Riemann [1826-1866]. La théorie a connu un essor particulier au cours du XX^e siècle, notamment lors de la seconde guerre mondiale, pour des raisons tout à fait non-pacifiques. Cependant, la dynamique des fluides compressibles reste encore aujourd'hui un vaste sujet d'étude, aux applications variées dans le domaine civil comme l'aéronautique, les turbo-machines, etc., où les ondes de choc jouent un rôle important, souvent néfaste. La focalisation des ondes de choc est un phénomène difficile à maîtriser, qui a des applications intéressantes, notamment en médecine pour réduire des calculs rénaux, ou potentiellement en physique nucléaire pour réaliser la fusion. Il reste de nombreux phénomènes physiques mal compris faisant certainement intervenir des ondes de choc. C'est le cas par exemple de la sonoluminescence, phénomène intrigant de conversion de son en lumière dont on parlera plus en détail au cours du premier chapitre.

L'objectif de ce projet est de faire un bilan des connaissances actuelles en ce qui concerne les ondes de choc et plus spécialement leur focalisation dans les fluides compressibles. On s'attachera ici particulièrement à étudier les solutions auto-similaires* des équations d'Euler comprenant un choc "fort".

Les premiers travaux dans ce domaine sont dûs à Chisnell [4] [3], Whitham [27] et concernaient essentiellement les gaz parfaits polytropiques ; l'étude de la focalisation et la réflexion de chocs sphériques est attribuée à Guderley [9] et on parle souvent de *solutions de Guderley*. Récemment, on s'est intéressé à des fluides obéissant à des lois d'état plus compliquées, ne serait-ce que la loi de Van der Waals, à laquelle se sont notamment attachés Wu & Roberts [20] [21] ou encore Steiner & Hirschler [25], Jena & Sharma [11], Conforto [5]. En particulier, Wu & Roberts ont recherché des solutions généralisant celles de Guderley : ceci passe par l'étude d'un système d'équations différentielles ordinaires 3×3 —au lieu de 2 pour un gaz parfait polytropique— avec 5 paramètres, dont ce qu'on appelle le coefficient d'auto-similarité.

Après quelques développements au sujet des phénomènes physiques reliés aux ondes de choc sphériques, on donnera dans le deuxième chapitre quelques rappels de base sur les équations d'Euler. Puis le chapitre 3 sera entièrement consacré à la recherche de solutions auto-similaires pour le système d'équations différentielles ordinaires en question, en se référant à différents articles : Chisnell [4], Wu & Roberts [20]. Enfin, le chapitre 4 reprendra les éléments sur la stabilité des chocs sphériques exposés dans Evans [8].

*Solutions qui ne dépendent que d'une seule variable, combinaison de la variable d'espace et de la variable de temps.

Table des matières

1	Phénomènes physiques.	5
1.1	Cavitation.	5
1.2	Sonoluminescence.	7
1.2.1	Observations expérimentales.	7
1.2.2	Quelques explications.	8
2	Les équations d'Euler compressibles.	11
2.1	Les variables.	11
2.1.1	Définitions.	11
2.1.2	Relations entre les variables.	12
2.2	Les équations.	13
2.2.1	Les équations d'Euler compressibles.	13
2.2.2	Équations pour une solution régulière à symétrie particulière.	13
2.2.3	Conditions de saut à la discontinuité.	14
2.3	Groupes de symétrie.	15
2.3.1	Opérateur d'invariance.	17
2.3.2	Résultats	18
3	Solutions auto-similaires.	19
3.1	Explosion forte.	19
3.2	Focalisation.	21
3.2.1	Changement de variables.	21
3.2.2	Valeurs limites.	23
3.2.3	Point de passage à la singularité.	27
3.2.4	Portrait de phases.	29
4	Stabilité des solutions sphériques.	35
4.1	Équation de la surface de discontinuité.	35
4.1.1	Mouvement d'un choc dans un tube de section variable.	35
4.1.2	Tube dont la section varie lentement.	38
4.1.3	Approximation par des tubes de rayons.	39
4.2	Perturbation.	40
	Conclusion.	43
A	Propriétés du système des équations d'Euler compressibles.	45
A.1	Hyperbolicité.	45
A.2	Courbes caractéristiques.	46
A.3	Invariants de Riemann.	47

A.4	Problème du piston	48
B	Calcul des invariants par les groupes de Lie.	49
B.1	Éléments théoriques.	49
B.1.1	Quelques définitions.	49
B.1.2	Théorie de la continuation.	51
B.1.3	Groupes d'invariance d'équations différentielles.	52
B.2	Application aux équations d'Euler.	52
B.2.1	Opérateur d'invariance.	52
B.2.2	Développement de la première équation.	54
B.2.3	Résolution du système	57
C	Rappels de la théorie des équations différentielles ordinaires.	61
	Références.	62

Chapitre 1

Phénomènes physiques.

De nombreux phénomènes physiques sont reliés à la focalisation d'ondes de choc dans les fluides compressibles réels, par exemple la cavitation, qui endommage les turbines des bateaux, ou encore la sonoluminescence. En médecine, des bulles qui implosent pourraient également faire exploser mécaniquement des cellules malignes, ou augmenter la perméabilité des parois d'une grande diversité de cellules, de sorte que les grosses molécules d'ADN puissent les traverser sans être modifiées, ou encore permettre la délivrance dirigée de médicaments. De telles applications sont plus amplement développées dans [24], sections 6 & 9, par exemple en ce qui concerne la destruction de calculs (rénaux) par des ondes de chocs, le traitement de maladies des os, ou l'augmentation de la perméabilité des membranes cellulaires.

On voudrait ici décrire brièvement le phénomène de cavitation et s'intéresser plus particulièrement à la sonoluminescence, i.e. à la conversion de son en lumière.

1.1 Cavitation.

La cavitation décrit la naissance et l'oscillation radiale de bulles de vapeur dans un liquide soumis à une dépression. Si cette dépression est suffisamment élevée, la pression peut devenir inférieure à la pression de vapeur, et une bulle de vapeur est susceptible de naître. La dépression peut avoir deux origines différentes :

- elle peut être liée à un écoulement de liquide à forte vitesse, par exemple au voisinage d'une pale dans une pompe ou encore sur une hélice de bateau ou de sous-marin. En effet, une zone de forte vitesse dans un fluide correspond à une faible pression*. On parle de *cavitation hydrodynamique*, découverte en 1917 par Lord Rayleigh.
- elle peut être liée aux variations de densité d'un liquide soumis à une onde acoustique, en général des ultrasons de puissance. On parle alors de *cavitation acoustique*.

Quelle qu'en soit l'origine, la cavitation a deux effets différents :

- les bulles de vapeur changent complètement le comportement du liquide. La cavitation hydrodynamique détruit le rendement de l'hélice ou de la pompe. L'énergie n'est plus transformée en mouvement (par exemple), mais soit elle reste dans l'engin moteur (qui peut ne pas supporter de sortir ainsi des conditions normales de travail), soit elle est diffusée sous une forme incontrôlée et donc probablement nuisible.

*D'après le théorème de Bernoulli, si un gaz est caractérisé par u sa vitesse, z l'altitude, p la pression, ρ la densité et si g est la constante de gravité, alors on a la relation : $\frac{u^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = Cste$.

- le plus souvent la bulle de vapeur est transitoire : son apparition élimine instantanément les conditions qui lui ont donné naissance. Il se produit donc une implosion de la bulle. Cette dernière peut-être si violente que les pression et température à l'intérieur de la bulle peuvent prendre des valeurs très élevées (plusieurs milliers de bar, plusieurs milliers de Kelvin). En implosant, la bulle peut émettre une onde de choc dans le liquide, qui permet de casser des gouttes (émulsification), de disperser, désagglomérer ou briser des particules solides, ou encore de nettoyer ou éroder des surfaces solides (cf. fig. 1.1).

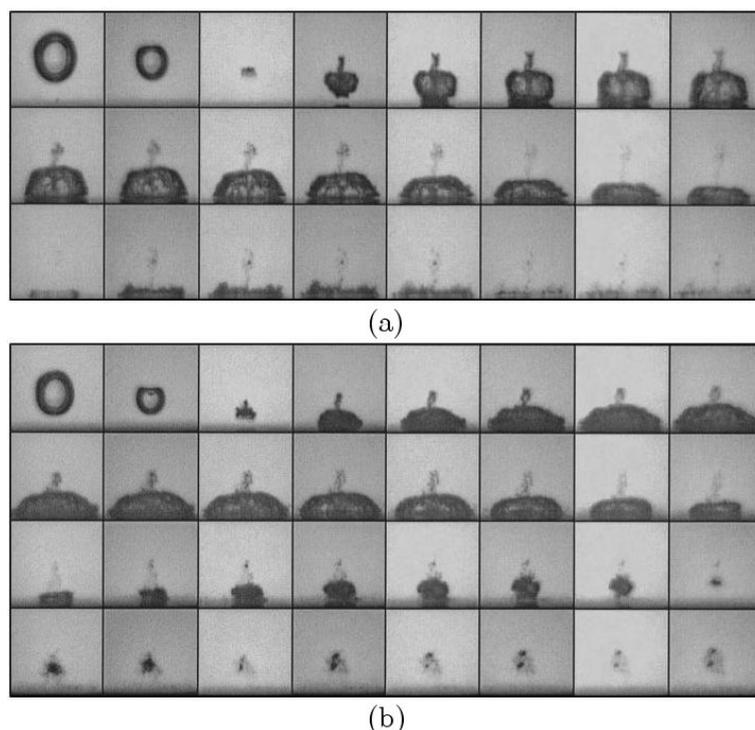


FIG. 1.1 – Photographie d'une bulle de cavitation au voisinage d'une paroi solide. Rayon maximal de la bulle avant la première réflexion $R_{max} = 1,45mm$, 56 500 prises/s ($\Delta t = 17,7\mu s$), largeur du cadre 3,9 mm ; (a) : $s/R_{max} = 1,6$, (b) : $s/R_{max} = 1,4$, où s est la distance du centre de la bulle à la paroi au moment de sa formation. Source : [18].

C'est pourquoi le contrôle du phénomène de cavitation est essentiel en hydrodynamique : il représente une limite, à cause de la perte de rendement voire de la destruction (des hélices et pompes) qu'il peut provoquer. Mais inversement, la bonne compréhension du phénomène peut permettre de l'exploiter. Des applications pour le nettoyage ont été proposées. De plus, la densité d'énergie ainsi atteinte dans certaines bulles donne lieu à des réactions chimiques inhabituelles, domaine appelé *sonochimie*, et même dans certain cas à l'émission de lumière, phénomène appelé *sonoluminescence*. Certains chercheurs pensent même qu'il est possible d'exploiter ces phénomènes pour réaliser une fusion nucléaire.

Remarque : La cavitation est exploitée de façon assez singulière dans la nature par une crevette tropicale qui possède l'une de ces pinces surdéveloppée par rapport à l'autre. Lorsqu'elle referme cette énorme pince il en résulte un écoulement très violent engendrant une bulle de cavitation hydrodynamique, qui, en implosant, émet une onde de choc susceptible

d'assommer, voire tuer le plancton environnant. On a longtemps cru que le bruit provenait de la pince elle-même, avant qu'une équipe hollandaise démontre l'apparition d'une bulle de cavitation à l'aide d'une caméra rapide. La même équipe a d'ailleurs démontré que cette bulle était lumineuse.

On voudrait maintenant expliquer un peu mieux le phénomène de sonoluminescence, qui est en fait un cas particulier de cavitation.

1.2 Sonoluminescence.

Tout d'abord, on présentera le phénomène, puis on exposera les différentes théories qui l'expliquent. On se réfère essentiellement ici à une fiche de T.P. du parcours Phytem[†] [16] et à un article de Hilgenfeldt & Lohse [10].

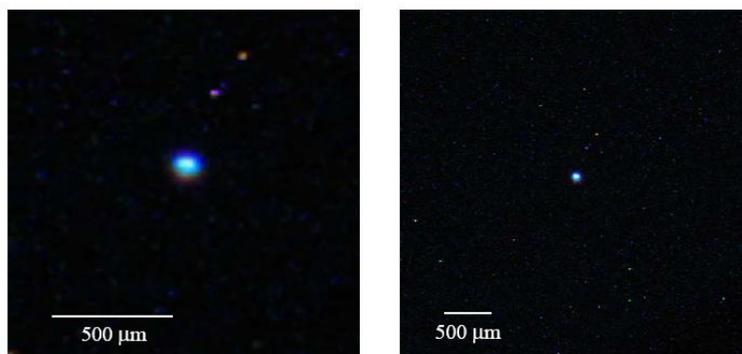


FIG. 1.2 – Photographie d'une bulle émettant de la lumière par sonoluminescence (prise derrière le cathétomètre avec un temps de pose de 8 secondes, avec et sans zoom sur un appareil numérique). Source : [16].

1.2.1 Observations expérimentales.

En 1933, N.Marines et J.J.Trillat [15] observèrent que des plaques photographiques étaient impressionnées par immersion dans un liquide agité par ultrasons et découvrirent ainsi la sonoluminescence émise par de multiples bulles (MBSL i.e. Multi-Bubble Sono-Luminescence). Cependant, l'étude du phénomène a été stoppée car les bulles ne perdurent que pendant quelques cycles acoustiques, n'émettent de la lumière que pendant quelques nanosecondes et sont en mouvement constant. Ces limitations ont été levées lorsqu'il a été possible de capturer de manière stationnaire une unique bulle de manière à produire la SBSL (Single-Bubble Sono-Luminescence).

[†] Le parcours Phytem, "Physique : Théorie, Expérience et Modèle" est une formation en trois années après le premier cycle universitaire, qui associe le Département de physique de l'ENS Cachan et l'UFR 925 "Physique Fondamentale et Appliquée" de l'Université Pierre et Marie Curie.

La bulle est en fait capturée par la force liée à la pression acoustique appelée *force de Bjerknes*, qui capture la bulle dans un “ventre de pression”. La poussée d’Archimède devient alors négligeable pour des ondes ultrasonores suffisamment intenses.

On soumet ainsi une bulle à des cycles acoustiques ultrasonores. À mesure que la pression diminue, la bulle se dilate jusqu’à environ 10 fois son diamètre initial (cf. fig. 1.3), puis la bulle cesse de croître au début de la phase de compression de l’onde sonore. La pression interne dans la bulle est alors très faible car il y a peu d’air qui diffuse à l’intérieur à partir de l’eau environnante, ce qui provoque l’effondrement rapide de la bulle jusqu’à 1% de son diamètre maximal —les forces de répulsion entre les atomes et les molécules de gaz (forces de Van der Waals) l’empêchent de rétrécir davantage. La bulle émet alors un flash de lumière de très courte durée, inférieur à 50ps (cf. fig. 1.2) et oscille doucement autour de son rayon minimal avant que le processus ne recommence.

Pour résumer, ce phénomène se produit lorsqu’une ou plusieurs bulles, piégées à l’intérieur

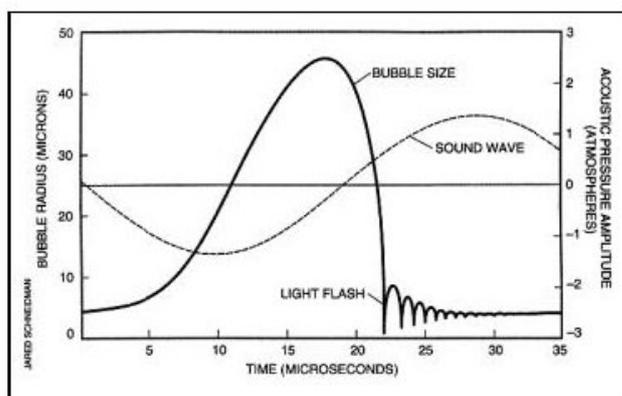


FIG. 1.3 – Evolution théorique dans le temps du rayon de la bulle en fonction de la pression acoustique pendant un cycle. Source : [16].

d’un liquide par un champ acoustique sinusoïdal, sont forcées à osciller pendant les phases de compression et dépression de l’onde acoustique. On observe alors, après une phase d’expansion de la bulle, une phase de compression très brutale qui conduit à l’effondrement de la bulle. Des conditions extrêmes de pression et de température sont atteintes à l’intérieur de la bulle et de la lumière est émise.

Cependant malgré les avancées importantes effectuées sur ce sujet, le mécanisme de production de lumière ainsi que l’estimation de la température atteinte à l’intérieur de cette bulle ne sont pas encore totalement compris et plusieurs théories tentent d’expliquer ce mécanisme.

1.2.2 Quelques explications.

Le mécanisme physique à l’origine de la SBSL donne lieu à controverse dans la littérature. Mais il y existe un point qui semble généralement accepté. Comme le spectre émis est continu et de large bande (cf. fig. 1.4), on suppose que la SBSL est émise par un état de plus haute énergie du gaz dans la bulle, à savoir un plasma.

Malgré l’accord général sur le modèle de plasma parmi les auteurs qui supposent que la bulle demeure sphérique lors de son effondrement, les points de vue divergent sur la

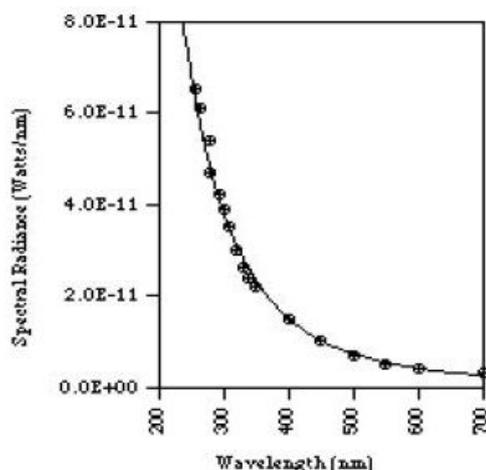


FIG. 1.4 – Spectre de sonoluminescence pour une bulle d’air dans l’eau à 22°C. Source : [16].

manière dont ce plasma se forme. Il existe plusieurs modèles théoriques de l’effondrement de la bulle :

1. Théorie de l’onde de choc : cette théorie fut d’abord proposée par S. Putterman [19]. Elle repose sur l’hypothèse que la bulle demeure parfaitement sphérique. Quand la bulle s’effondre, la pression interne croît. À son rayon minimal, la pression dans la bulle avoisinerait les 200 Mbar. Dans ces conditions de pression, les forces de Van der Waals dans le gaz deviennent importantes et la bulle cesse de s’effondrer. Les parois de la bulle décèlent très rapidement si bien qu’une onde de choc est créée et se propage jusqu’au centre entraînant une élévation supplémentaire de la température du gaz au centre de la bulle. Quand l’onde de choc est à sa taille minimale, l’énergie qu’elle contient est concentrée et de la lumière est émise.
2. Compression quasi-adiabatique : dans ce modèle, la température est supposée être uniforme dans la bulle, excepté dans une couche proche des parois de la bulle. La bulle est entièrement chauffée pendant la compression adiabatique par conversion de l’énergie cinétique des gaz quand leur mouvement est stoppé en fin d’effondrement.
3. Ionisation des gaz rares : les hautes températures atteintes durant l’effondrement normal de la bulle d’air entraînent la dissociation des molécules d’oxygène et d’azote en atomes qui réagissent chimiquement avec la vapeur d’eau présente dans la bulle. Les gaz, O_2 et N_2 , sont donc ainsi progressivement évacués de la bulle. Si une telle bulle renferme donc au départ un mélange de gaz, après plusieurs cycles d’oscillation elle ne contient plus que ceux qui ne se dissocient pas, même à haute température, autrement dit les gaz rares. La bulle d’air initiale est donc rapidement transformée en bulle contenant principalement de l’Argon. De part la compression et l’échauffement de la bulle, on observe l’ionisation de ces gaz rares : ils perdent un ou plusieurs électrons qui se mettent alors à circuler à grande vitesse et émettent de la lumière par recombinaison radiative ou “bremstrahlung” thermal. Des calculs montrent que l’émission que l’on observe lors de la sonoluminescence d’une bulle d’argon est ex-

pliquée par l'ionisation de 1% seulement des atomes. La température calculée est de l'ordre de 10 000 K.

Ici, on considérera la première hypothèse, celle de la propagation d'une onde de choc à l'intérieur de la bulle. Pour cela il faut tout d'abord mettre en place le système d'équations, à savoir *les équations d'Euler*, puis on en cherchera des solutions à symétrie particulière.

Chapitre 2

Les équations d'Euler compressibles.

On voudrait dans cette section mettre en place le cadre de travail : écrire les équations décrivant le mouvement d'un fluide réel compressible et étudier leurs propriétés basiques, notamment leurs groupes de symétrie, dans l'idée de chercher une solution auto-similaire, dans le chapitre suivant.

2.1 Les variables.

Les notions qui suivent sont notamment explicitées dans le livre de Sédov [22] ou de Landau & Lifschitz [12], mais aussi dans celui de Serre [23] § 1.1 et de Whitham [27] § 6.1.

2.1.1 Définitions.

On considère un fluide compressible, d'état thermodynamique et cinématique décrit par les variables suivantes, dépendant de \mathbf{x} et t , variables d'espace et de temps :

ρ	la densité,
\mathbf{u}	le vecteur vitesse,
p	la pression,
c	la vitesse du son,
e	l'énergie interne spécifique*,
w	l'enthalpie spécifique,
s	l'entropie spécifique,
T	la température.

Bien sûr toutes ces variables ne sont pas indépendantes. On supposera que p est fonction de (ρ, T) , comme, par exemple, pour un gaz parfait ou un gaz de Van der Waals[†]. On rappelle :

Définition 2.1.1 *Un gaz est dit parfait s'il vérifie l'équation d'état :*

$$p = \mathfrak{R}\rho T,$$

où $\mathfrak{R} = 8,3144 J.K^{-1}.mol^{-1}$ est la constante des gaz parfaits.

*L'adjectif *spécifique* est un synonyme ancien de *massique*, i.e. par unité de masse.

†On dit alors que le gaz vérifie une *loi d'état incomplète*.

Un gaz est dit de Van der Waals s'il vérifie l'équation d'état

$$p\left(\frac{1}{\rho} - \theta\right) = \mathfrak{R}T,$$

où θ est le covolume, qui représente la limite de compressibilité du fluide, due au volume des molécules.

Remarques :

1. Un gaz parfait peut être vu comme un gaz de Van der Waals avec $\theta = 0$.
2. La loi de Van der Waals permet également de modéliser les gaz poussiéreux, comme dans Steiner & Hirschler [25] ou encore Jena & Sharma [11].
3. Lorsque $\theta \neq 0$, pour que la valeur de ρ reste crédible, il faut avoir : $1 - \theta\rho > 0$, sans quoi on considérerait un volume de gaz plus petit que le volume des molécules qu'il contient !

On introduit d'autre part c_p et c_V les *capacités calorifiques* à pression et volume constants respectivement définies, lorsque ces dérivées ont un sens, par $c_p = \left.\frac{\partial w}{\partial T}\right|_p$ et

$$c_V = \left.\frac{\partial e}{\partial T}\right|_V. \text{ On pose alors } \gamma = \frac{c_p}{c_V}.$$

Pour rester dans des limites physiques acceptables, on prendra $\gamma \in [1, 3]$.

2.1.2 Relations entre les variables.

Considérons une quantité élémentaire de gaz. Soient Q la chaleur spécifique échangée entre le gaz et l'extérieur, W le travail spécifique fourni par le gaz et $V = 1/\rho$ le volume spécifique du gaz.

On écrit le *premier principe* : $de = \delta Q + \delta W$.

On a en outre :

$$\begin{aligned} \delta Q &= c_V dT + \ell dV \\ &= c_p dT + h dV \\ \text{et} \\ \delta W &= -p dV \end{aligned}$$

où les coefficients calorimétriques ℓ et h s'expriment grâce aux *formules de Clapeyron* :

$$\ell = T \left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V \quad \text{et} \quad h = -T \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p.$$

Pour un gaz parfait on a : $\ell = p$, $h = -V$ et pour un gaz de Van der Waals on a $\ell = p$, $h = -(V - \theta)$. Le premier principe s'écrit donc, dans ces deux cas : $de = c_V dT$, d'où, si on suppose que c_V est constant :

$$e = c_V T.$$

Selon le *second principe*, on a d'autre part : $T ds = \delta Q$.

Pour un gaz de Van der Waals, on trouve donc $ds = \frac{c_V}{T} dT + \frac{\mathfrak{R}}{V-\theta} dV$, d'où, à une constante additive près, si on suppose que c_V est constant :

$$s = c_V \ln(T) + \mathfrak{R} \ln(V - \theta).$$

On définit enfin la vitesse du son par :

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s.$$

On a alors : $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$ dans le cas d'un gaz parfait polytropique*, et $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho(1-\theta\rho)}$ dans le cas d'un gaz de Van der Waals de coefficients calorimétriques c_p et c_V constants ; la vitesse du son est donc bien dans ce cas un réel positif, son carré étant positif.

Remarque : dans le cas *isentropique*, $hdp - \gamma \ell dV = 0$ i.e. $\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_s = \frac{\gamma \ell}{h}$.

Pour un gaz parfait, ceci devient la *loi de Laplace* : $pV^\gamma = cste$.

Pour un gaz de Van der Waals, on trouve : $p(V - \theta)^\gamma = cste$.

Hypothèses : Tout au long de l'exposé, on considérera désormais un gaz de Van der Waals de covolume θ , dont les coefficients calorimétriques c_p et c_V sont constants.

2.2 Les équations.

Maintenant qu'on a apprivoisé les variables, on écrit les équations du mouvement d'un gaz. On pourra notamment se référer à l'ouvrage de Serre [23], ou aux polycopiés de cours de S. Benzoni [1].

2.2.1 Les équations d'Euler compressibles.

L'état d'un gaz est décrit en tout point par le système :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 & \text{loi de conservation de la masse,} \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0 & \text{loi de conservation de la quantité} \\ & \text{de mouvement,} \\ \partial_t \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho e \right) + \operatorname{div} \left(\left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 + \rho e + p \right) \mathbf{u} \right) = 0 & \text{loi de conservation de l'énergie.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Pour les solutions régulières, on peut manipuler (2.1) grâce à la règle de dérivation des fonctions composées. Ceci conduit au système équivalent :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \\ \partial_t e + \mathbf{u} \cdot \nabla e + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

On peut aussi remplacer la dernière équation par $\partial_t s + \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0$, ou encore par $\partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p - c^2(\partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho) = 0$.

2.2.2 Équations pour une solution régulière à symétrie particulière.

On cherche des solutions à symétrie particulière —plane, cylindrique ou sphérique—, de façon à ne plus avoir qu'une seule variable d'espace r . De plus, on suppose que la vitesse \mathbf{u} est alors orientée selon le vecteur radial \mathbf{e}_r (ou selon \mathbf{e}_x dans le cas d'une onde plane).

*Un gaz parfait est dit polytropique lorsque ses coefficients calorimétriques c_p et c_V sont constants.

Proposition 2.2.1 *Lorsqu'on considère un gaz de Van der Waals dont les coefficients calorimétriques c_p et c_V sont constants[†], pour des solutions régulières à symétrie plane ($j = 0$), cylindrique ($j = 1$), ou sphérique ($j = 2$) — ce qui ramène dans tous les cas à une seule variable d'espace r — le système des équations d'Euler compressibles (2.1) devient :*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_r \rho + \frac{j \rho u}{r} + \rho \partial_r u = 0 \\ \partial_t u + u \partial_r u + \frac{1}{\rho} \partial_r p = 0 \\ \partial_t p + u \partial_r p - c^2 (\partial_t \rho + u \partial_r \rho) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Il est à noter que la dernière équation du système (2.2), qui peut aussi s'écrire :

$$\partial_t s + u \partial_r s = 0, \quad (2.3)$$

exprime la conservation de l'entropie le long d'une certaine courbe dite *caractéristique*[‡].

Remarques :

- Si on supposait le fluide isotherme ou isentropique, on aurait une relation de plus entre les inconnues, et le système se restreindrait à deux équations, deux inconnues.
- Le système n'est pas autonome, puisque r apparaît dans la première équation du système (2.2).

On va maintenant coupler le système (2.2) à des conditions de saut à travers une discontinuité.

2.2.3 Conditions de saut à la discontinuité.

On dispose du théorème suivant, énoncé par exemple dans l'ouvrage de Serre [23], ou encore dans celui de Whitham [27] :

Lemme 2.2.1 (Condition de Rankine-Hugoniot.) *Considérons un couple (u, q) de fonctions continues par morceaux dans le domaine ω , dont la discontinuité a lieu le long d'une courbe régulière Γ , qui sépare ω en deux composantes connexes ω_1 et ω_2 . On suppose que (u, q) est de classe \mathcal{C}^1 dans ω_i ($i = 1$ ou 2). Enfin, on note $u_1(t, x)$ la limite de $u(t, y)$ quand (s, y) tend vers $(t, x) \in \Gamma$ en restant dans ω_1 . On définit de même $q_1(t, x)$, puis $u_2(t, x)$ et $q_2(t, x)$; et on note $[u](t, x) = u_2(t, x) - u_1(t, x)$ le saut de u à travers Γ .*

Sous ces hypothèses, le couple (u, q) satisfait l'équation $\partial_t u + \partial_x q = 0$ au sens des distributions dans ω ssi

1. u et q satisfont l'équation point par point dans ω_i ,
2. la condition de saut, dite condition de Rankine-Hugoniot, $[u]n_t + [q]n_x = 0$ est satisfaite le long de Γ , où $\mathbf{n} = (n_t, n_x)$ est un vecteur normal à Γ en (t, x) , unitaire.

Ainsi, la condition de Rankine-Hugoniot permet d'estimer le saut de discontinuité pour une solution non-régulière.

Pour une discontinuité se propageant à la vitesse $\mathbf{U} = U\nu$, où ν est un vecteur unitaire normal à la surface de discontinuité, elles s'écrivent donc dans le cas des équations d'Euler (2.1) :

$$\begin{cases} -\mathbf{U}[\rho] + [\rho\mathbf{u}] = 0, \\ -\mathbf{U}[\rho\mathbf{u}] + [\rho\mathbf{u}^2 + p] = 0, \\ -\mathbf{U}[\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + \rho e] + [(\frac{1}{2}\rho\mathbf{u}^2 + \rho e)\mathbf{u} + p\mathbf{u}] = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

[†]Pour un gaz parfait, on dirait que le gaz est polytrophique.

[‡]Un développement plus long est accordé aux *équations caractéristiques* en Annexe A.

Et ν est en fait ici le vecteur radial \mathbf{e}_r ou son opposé (cf. fig. 2.1), d'après la symétrie de la discontinuité.

Une discontinuité est généralement appelée *choc* lorsque U est distinct de la vitesse du fluide de part et d'autre de la discontinuité. On convient de numérotter les deux zones que sépare la discontinuité de sorte que le vecteur ν va de la zone 2 vers la zone 1 : aussi, la zone 1 est la zone *devant le choc* si $U - u_i$ ($i = 1$ ou 2) est positif et c'est la zone *derrière le choc* si $U - u_i$ est négatif, $U - u_1$ et $U - u_2$ étant de même signe d'après la première équation de (2.4). On note alors $v_i = U - u_i$, supposées positives : **on veut en effet que la zone 1 soit la zone devant le choc** (cf. fig. 2.1).

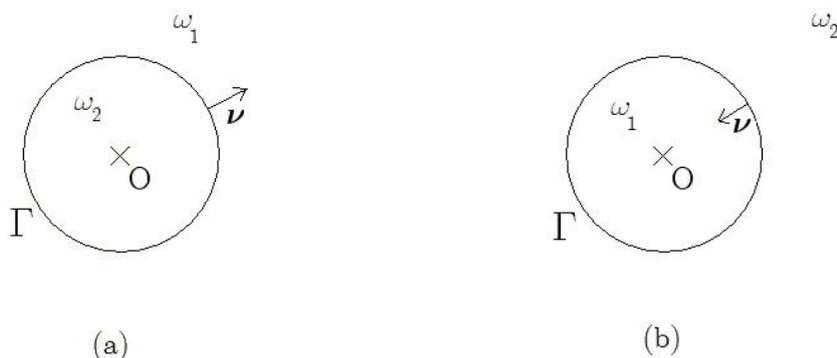


FIG. 2.1 – Courbe de discontinuité sphérique, pour explosion (a) et implosion (b), avec normales unitaires.

On introduit de plus le paramètre $M = \frac{U - u_1}{c_1}$, appelé *nombre de Mach*. Après quelques manipulations dans (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} &= 1 - \frac{2(1 - \theta\rho_1)(M^2 - 1)}{M^2(\gamma + 1)} \\ \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma(M^2 - 1)}{\gamma + 1} \end{aligned}$$

Dans le cas d'un choc fort pour lequel $p_2 \gg p_1$, on a donc $U \gg u_1$ et $M \gg 1$, d'où les approximations, en faisant tendre M (et U) vers $+\infty$:

$$u_2 \sim \frac{2U(1 - \theta\rho_1)}{\gamma + 1} ; \frac{\rho_2}{\rho_1} \sim \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2\theta\rho_1} ; p_2 \sim \frac{2\rho_1(1 - \theta\rho_1)U^2}{\gamma + 1}$$

Pour finir cette partie concernant le système d'équations (2.2), on voudrait calculer les groupes d'invariances associés au système, en particulier pour savoir s'il est judicieux de chercher une variable auto-similaire, et quelle forme celle-ci pourrait avoir. On va pour cela utiliser une méthode utilisant les groupes de Lie.

2.3 Groupes de symétrie des équations (2.2), pour un gaz de Van der Waals.

Ainsi, on s'intéresse aux groupes de symétrie des équations, ce qui donne parfois des informations utiles concernant la forme des solutions. L'article de Jena & Sharma [11]

utilise la méthode des groupes de Lie, pour rechercher les invariants des équations d'Euler compressibles avec la loi de Van der Waals. Il s'agit d'une méthode systématique mais très technique. La connaissance de tous les groupes de symétrie leur permet de trouver certains résultats : ils en déduisent notamment toutes les formes possibles pour une éventuelle variable auto-similaire, ainsi que l'expression du rayon de la surface de discontinuité ; en outre, Donato & Oliveri [7] s'en servent pour mettre le système sous forme autonome.

Ici, on va chercher à retrouver ces groupes de symétrie, car les détails ne sont pas donnés dans l'article de Jena & Sharma. La théorie se développe essentiellement en deux points, explicités dans l'ouvrage d'Ovsiannikov [17], et plus détaillés dans l'annexe ???. On donne juste ici quelques idées concernant cette méthode :

- On cherche les générateurs des groupes d'invariance pour une variété, donnée par le système d'équations algébriques $F(x) = 0$, i.e. les transformations à un paramètre $f : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, a) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$, on a la relation :

$$F(f(x, a)) = F(x). \quad (2.5)$$

On se sert pour cela de la théorie des groupes de Lie à un paramètre (cf. annexe ???) selon laquelle chercher de tels groupes de transformations revient à chercher un *vecteur tangent* $\zeta(x) = \partial_a f(x, 0)$. À l'aide de ce vecteur tangent, la relation (2.5) se réécrit $(\zeta \cdot \partial)F(x) = 0$, où le champ de vecteur $\zeta \cdot \partial$ est défini par la formule :

$$\zeta \cdot \partial = \sum_i \zeta_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Par exemple, en dimension 1, un groupe de translation est donné par la transformation $f(x, a) = x + a$, son vecteur tangent est 1 et l'opérateur d'invariance associé est ∂_x .

Un groupe de dilatation est donné par la transformation $f(x, a) = xe^{ma}$, son vecteur tangent est mx et l'opérateur d'invariance associé est $mx\partial_x$. Le problème revient donc à chercher ζ .

- Pour un système avec des E.D.P., on utilise en plus la *théorie de la continuation* (cf. annexe ???, où les notations introduites ici sont mieux définies), qui permet de considérer à la fois les variables (r et t dans notre cas) et les fonctions inconnues (ρ , u et p) comme des variables de \mathbb{R}^k , avec $k = 5$. En effet, on a un système d'équations différentielles E qu'on interprète comme une variété, dans un certain espace, dont on veut trouver les groupes d'invariances. Pour utiliser les résultats concernant les groupes de Lie, on doit d'abord se ramener à un système linéaire. On utilise pour cela la théorie de la continuation. Ainsi, si E est un système d'ordre k , de m fonctions inconnues $y = (y_1, \dots, y_m)$, dépendant de n variables indépendantes $x = (x_1, \dots, x_n)$, on pose :

$$z = (x, y) \in Z = X \times Y = \mathbb{R}^{n+m},$$

et on peut alors écrire E sous la forme :

$$F_k(z) = 0$$

où $F : Z_k \rightarrow \mathbb{R}^s$.

On peut alors chercher les continuations k^e des opérateurs $\zeta \cdot \partial$ pour lesquels cette variété est invariante. En tronquant, on retrouvera $\zeta \cdot \partial$.

Attention : Dans tout ce paragraphe, et uniquement dans celui-ci, contrairement aux notations des autres sections de cet exposé, l'indice 1 indiquera une dérivée temporelle et l'indice 2 une dérivée spatiale.

2.3.1 Opérateur d'invariance.

Pour le problème qui nous intéresse, on a :

- deux variables (indépendantes) : r et t ,
- trois inconnues (variables dépendantes) : u , p et ρ ,
- des dérivées d'ordres un : $(u_1, u_2, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2)$.

L'opérateur d'invariance s'écrit alors :

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_t + \eta \partial_r + \sigma \partial_u + \tau \partial_p + \omega \partial_\rho. \quad (2.6)$$

Le problème consiste à trouver ξ , η , σ , τ et ω tels que $(\zeta \cdot \partial)F(t, r) = 0$, F désignant le système (2.2).

Pour cela, on écrit la continuation première de l'opérateur (B.2), ce qui permet de considérer les dérivées premières comme des variables indépendantes. La continuation première suffit ici puisque le système (2.2) est d'ordre un. On appliquera ensuite cet opérateur à chacune des équations du système (2.2).

Tout d'abord, pour simplifier un peu les notations, on introduit l'opérateur D_1 , dans lequel apparaissent les opérateurs de dérivation totale D_1 et D_2 , opérateurs qui jouent un rôle particulièrement important dans la théorie de la continuation :

$$D_1 = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \partial_u + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \partial_p + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \partial_\rho$$

D'après [17] (chapitres I & II), la continuation première de l'opérateur (B.2) s'écrit alors :

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_t + \eta \partial_r + \sigma \partial_u + \tau \partial_p + \omega \partial_\rho + \sigma_1 \partial_{u_1} + \sigma_2 \partial_{u_2} + \tau_1 \partial_{p_1} + \tau_2 \partial_{p_2} + \omega_1 \partial_{\rho_1} + \omega_2 \partial_{\rho_2}$$

où :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= D_1 \sigma - u_1 D_1 \xi - u_2 D_1 \eta \\ \sigma_2 &= D_2 \sigma - u_1 D_2 \xi - u_2 D_2 \eta \\ \tau_1 &= D_1 \tau - p_1 D_1 \xi - p_2 D_1 \eta \\ \tau_2 &= D_2 \tau - p_1 D_2 \xi - p_2 D_2 \eta \\ \omega_1 &= D_1 \omega - \rho_1 D_1 \xi - \rho_2 D_1 \eta \\ \omega_2 &= D_2 \omega - \rho_1 D_2 \xi - \rho_2 D_2 \eta \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si on applique $\zeta \cdot \partial$ au système (2.2). On obtient :

$$\begin{cases} \omega_1 + u\omega_2 + \rho_2 \sigma + \frac{j\omega u}{r} + \frac{j\rho\sigma}{r^2} - \frac{j\rho u \eta}{r^2} + \omega u_2 + \rho\sigma_2 = 0 \\ \sigma_1 + u\sigma_2 + \sigma u_2 + \frac{1}{\rho}\tau_2 - \frac{\omega}{\rho^2}p_2 = 0 \\ \tau_1 + u\tau_2 + \sigma p_2 - c^2(\omega_1 + u\omega_2 + \sigma\rho_2) - \gamma \left(\frac{\tau}{\rho(1-\theta\rho)} - \frac{p\omega(1-2\theta\rho)}{\rho^2(1-\theta\rho)^2} \right) (\rho_1 + u\rho_2) = 0 \end{cases}$$

Il reste alors à développer tous les termes. De plus, parmi la première continuation des inconnues, on a trois variables libres : u_2 , p_2 et ρ_2 , et trois variables dépendantes : u_1 , p_1 et ρ_1 . En effet, le système (2.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \rho_1 = -(u\rho_2 + \frac{j\rho u}{r} + \rho u_2), \\ u_1 = -(u u_2 + \frac{1}{\rho} p_2), \\ p_1 = -(c^2 \frac{j\rho u}{r} + c^2 \rho u_2 + u p_2). \end{cases}$$

On peut ainsi supprimer toutes les occurrences des variables dépendantes dans le développement des équations.

2.3.2 Résultats

Les calculs sont détaillés en annexe ??.

Proposition 2.3.1 (Groupes de symétrie des équations d'Euler.) *Les groupes de symétrie du système (2.2), qui donne les mouvements à symétrie plane ($j=0$), cylindrique ($j=1$) ou sphérique ($j=2$), d'un gaz de Van der Waals de covolume θ , à coefficients calorimétriques constants sont*

Dans le cas $\theta \neq 0$ et $j \neq 0$:

$$\begin{array}{lll} \zeta_1 \cdot \partial = \partial_t & \text{générateur de la translation} & t \mapsto t + a, \\ \zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r & \text{générateur du changement d'échelle} & (t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r), \\ \zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p & \text{générateur du changement d'échelle} & (t, u, p) \mapsto \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p\right). \end{array}$$

Dans le cas $\theta = 0$ et $j \neq 0$:

$$\begin{array}{lll} \zeta_1 \cdot \partial = \partial_t & \text{générateur de la translation} & t \mapsto t + a, \\ \zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r & \text{générateur du changement d'échelle} & (t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r), \\ \zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p & \text{"} & (t, u, p) \mapsto \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p\right), \\ \zeta_4 \cdot \partial = t\partial_t - u\partial_u + 2\rho\partial_\rho & \text{"} & (t, u, \rho) \mapsto \left(\lambda t, \frac{u}{\lambda}, \lambda^2 \rho\right). \end{array}$$

Dans le cas $\theta \neq 0$ et $j = 0$:

$$\begin{array}{lll} \zeta_1 \cdot \partial = \partial_t & \text{générateur de la translation} & t \mapsto t + a, \\ \zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r & \text{générateur du changement d'échelle} & (t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r), \\ \zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p & \text{"} & (t, u, p) \mapsto \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p\right), \\ \zeta_4 \cdot \partial = t\partial_r + \partial_u & \text{changement de référentiel galiléen} & r \mapsto r + at, \quad u \mapsto u + a \\ \zeta_5 \cdot \partial = \partial_r & \text{générateur de la translation} & r \mapsto r + a. \end{array}$$

Dans le cas $\theta = 0$ et $j = 0$:

$$\begin{array}{lll} \zeta_1 \cdot \partial = \partial_t & \text{générateur de la translation} & t \mapsto t + a, \\ \zeta_2 \cdot \partial = t\partial_t + r\partial_r & \text{générateur du changement d'échelle} & (t, r) \mapsto (\lambda t, \lambda r), \\ \zeta_3 \cdot \partial = -t\partial_t + u\partial_u + 2p\partial_p & \text{"} & (t, u, p) \mapsto \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda u, \lambda^2 p\right), \\ \zeta_4 \cdot \partial = t\partial_r + \partial_u & \text{changement de référentiel galiléen} & r \mapsto r + at, \quad u \mapsto u + a, \\ \zeta_5 \cdot \partial = \partial_r & \text{générateur de la translation} & r \mapsto r + a, \\ \zeta_6 \cdot \partial = t\partial_t - u\partial_u + 2\rho\partial_\rho & \text{générateur du changement d'échelle} & (t, u, \rho) \mapsto \left(\lambda t, \frac{u}{\lambda}, \lambda^2 \rho\right). \end{array}$$

Ces groupes de symétries permettent notamment à Jena & Sharma [11] d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 2.3.1 *On considère un gaz de Van der Waals à coefficients calorimétriques c_p et c_V constants. On cherche une solution à symétrie cylindrique ou sphérique, discontinue, des équations d'Euler compressibles. On suppose en outre que le gaz au-devant de la discontinuité est au repos, de pression constante, de densité quelconque : $u_1 = 0$, $p_1 = \text{cste}$ et $\rho_1 = \rho_1(r)$.*

Si on souhaite que cette solution soit de surcroît auto-similaire, et si $\theta \neq 0$, alors ρ_1 doit être constante pour qu'une solution auto-similaire existe, dans ce cas on a alors :

- la variable auto-similaire est de la forme $\frac{r}{A|t|^\alpha}$, où A est une constante,
- le rayon de la discontinuité est de la forme $A|t|^\alpha$,
- la vitesse de propagation de la discontinuité est $\alpha A|t|^{\alpha-1}$.

D'autre part, Conforto [5], se basant sur les calculs de Donato & Oliveri [7], se sert de ces groupes de symétrie pour mettre le système 2.2 sous forme autonome.

Chapitre 3

Solutions auto-similaires.

On considère un gaz de Van der Waals, de covolume θ , dont les coefficients calorimétriques c_p et c_V sont constants. On cherche une solution discontinue, à symétrie plane, cylindrique ou sphérique des équations d'Euler compressibles, en supposant de surcroît que le gaz devant la discontinuité est homogène et au repos ($u_1 = 0$, $\rho_1 = \text{cste}$). En outre, on voudrait que cette solution soit auto-similaire, i.e. ne dépende que d'une seule variable, combinaison de r et de t . D'après les résultats de Jena & Sharma (cf. théorème 2.3.1), obtenus en observant les groupes de symétrie des équations (2.2), on peut espérer trouver une telle solution sous les conditions précédentes.

Tout d'abord on va aborder brièvement le cas de l'explosion, qui est relativement bien connu, au moins dans le cas du gaz parfait ; puis on s'attardera sur le cas général. On reprend dans cette partie les notations introduites au cours du chapitre précédent.

3.1 Explosion forte.

On injecte au temps $t = 0$ une très grande énergie E au point O , dans un gaz homogène au repos, caractérisé par : $u_1 = 0$, $\rho_1 = \text{cste}$, $p_1 = \text{cste}$. Il se produit alors une explosion. On cherche à savoir comment évolue le gaz dans la zone 2, derrière le choc. La grande intensité du choc implique que le saut de pression y est très important et que le nombre de Mach est très élevé :

$$\frac{p_2}{p_1} \gg 1 ; M = \frac{U}{c_1} \gg 1.$$

On parlera alors de *choc fort*.

Ce problème a notamment été étudié par Landau & Lifschitz [12], chap. 10, § 106, ou encore par Whitham [27], sec. 6.16, ou Sédov [22].

On peut alors négliger p_1 devant p_2 , et on a alors, d'après les conditions de Rankine-Hugoniot (cf. sec. 2.2.3) : $\frac{\rho_2}{\rho_1} \sim \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2\theta\rho_1}$.

Ainsi le caractère de l'écoulement du gaz sera déterminé par deux paramètres seulement : la masse volumique initiale ρ_1 et l'énergie introduite E . Avec ces paramètres et la variable de temps t , on peut former une seule combinaison homogène à une distance, à savoir :

$$\left(\frac{Et^2}{\rho_1} \right)^{1/5}.$$

D'après des théorèmes d'analyse dimensionnelle, explicités dans Sédov [22], la fonction $R(t)$, exprimant la distance de l'onde de choc au centre à l'instant t est alors nécessairement :

$R(t) = k \left(\frac{Et^2}{\rho_1} \right)^{1/5}$, ce qui concorde d'ailleurs assez bien avec les conclusions de Jena & Sharma (cf. théorème 2.3.1), avec $\alpha = 2/5$.

La vitesse de l'onde de choc est alors $U = \frac{2R(t)}{5t}$.

On pose alors $\xi = \frac{r}{R(t)}$, variable adimensionnée, qui variera entre 0 et 1 puisqu'on s'intéresse à l'évolution du fluide derrière le choc et qu'il s'agit ici d'une explosion. On passe de plus en inconnues adimensionnées (w, y, z) en posant : $\rho = \rho_1 w$, $u = \frac{\alpha r}{t} y$ et $c^2 = \left(\frac{\alpha r}{t} \right)^2 z$. On remplace alors (ρ, u, c^2) par (w, y, z) dans le système (2.2) puis on effectue le changement de variables $[(t, x) \rightarrow (\tau, \xi)]$, où $\tau = t$. Comme on cherche des solutions auto-similaires, les inconnues ne dépendent pas de τ , et on obtient finalement un système non-résolu d'équations différentielles ordinaires, qu'il est possible d'intégrer, au moins numériquement, et on obtient des courbes comme celles de la figure 3.1.

Il reste alors à déterminer la constante k , ce qui se fait en disant que l'énergie totale dans la zone 2 est constante et égale à E :

$$E = \frac{\rho_1 R(t)^5}{t^2 k^5} = \int_0^{R(t)} \left(\frac{p(1 - \theta\rho)}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) 4\pi r^2 dr$$

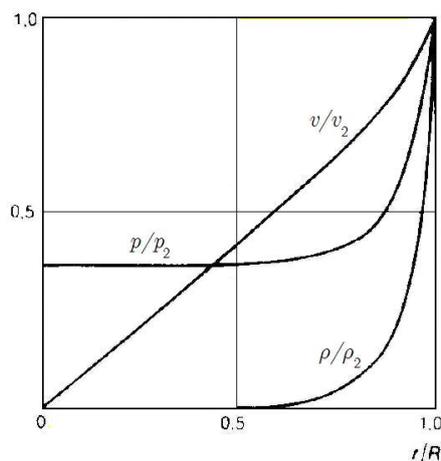


FIG. 3.1 – Représentation des quantités v/v_2 , p/p_2 , ρ/ρ_2 en fonction de $\xi = r/R$ pour l'air ($\gamma = 1,4$). Source = [12].

Cependant, dans le cas général, il n'est pas aussi facile de trouver une variable auto-similaire car on ne dispose pas a priori d'une constante homogène à une énergie E . Néanmoins, on peut s'inspirer de ces calculs pour effectuer des changements de variables ressemblant.

3.2 Focalisation.

3.2.1 Changement de variables.

Soit $[t \mapsto R(t)]$ la fonction donnant la distance de l'onde de choc au centre à l'instant t , a priori inconnue. On suppose que le choc atteint l'origine en $t = 0$ et on s'intéresse donc aux valeurs négatives de t . De même que Chisnell [4] ou Whitham [27], on introduit $\xi = \frac{r}{R(t)}$, variable adimensionnée, et (w, y, z) inconnues adimensionnées telles que : $\rho = \rho_1 w$, $u = \frac{\alpha r}{t} y$ et $c^2 = \left(\frac{\alpha r}{t}\right)^2 z$, où α est une constante à déterminer.

Remarque : Avant d'aller plus loin dans l'étude du système, on peut remarquer que, puisqu'on souhaite étudier l'évolution du fluide derrière le choc, dans le cas de la focalisation on aura $\xi \in [1, +\infty[$, le choc étant en $\xi = 1$. On peut aussi souligner que, pour des raisons physiques, w, y et z sont nécessairement positives. En outre $1 - \theta\rho_1 w$ doit être une quantité positive, ce qui donne une borne supérieure pour les valeurs de w .

Le système (2.2) devient, lorsqu'on remplace (ρ, u, c^2) par (w, y, z) :

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha w}(t\partial_t w + \alpha r y \partial_r w) + r\partial_r y + (1+j)y & = 0, \\ t\partial_t y + \alpha r y \partial_r y + \alpha y(y - \frac{1}{\alpha}) + \frac{\alpha}{\gamma}(1 - \theta\rho_1 w)(2z + r\partial_r z) + \frac{\alpha r z}{\gamma w}(1 - 2\theta\rho_1 w)\partial_r w & = 0, \\ t\partial_t z + \alpha r y \partial_r z + 2\alpha z(y - \frac{1}{\alpha}) + \alpha z \frac{\gamma - 1 + 2\theta\rho_1 w}{1 - \theta\rho_1 w}(r\partial_r y + (1+j)y) & = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

On effectue alors le changement de variables $(t, r) \rightarrow (\tau, \xi)$, où $\tau = t$. On a alors $r\partial_r = \xi\partial_\xi$ et $\partial_t = \partial_\tau - \xi \frac{R'}{R} \partial_\xi$. Or, la dépendance en t apparaît seulement dans la forme $t\partial_t = t\partial_\tau - \xi t \frac{R'}{R} \partial_\xi$, la solution du système est donc auto-similaire ssi $t \frac{R'}{R} = \text{cste}$. On pose α égal à cette constante. On obtient alors une expression de $R(t)$ compatible avec le théorème 2.3.1, à savoir : $R(t) = A(-t)^\alpha$, avec A une constante, et $U = R'(t) = \frac{\alpha R(t)}{(-t)} = \alpha A(-t)^{\alpha-1}$. Pour qu'il y ait effectivement focalisation, on doit alors prendre $\alpha > 0$ et pour que la vitesse U ne s'annule pas au moment de la focalisation, ce qui ne produirait aucune réflexion de l'onde de choc et donc pas de phénomène, on doit prendre $\alpha < 1$. Ainsi, on est amené à prendre : $\alpha \in [0, 1]$. On peut alors énoncer la proposition :

Proposition 3.2.1 (Variable auto-similaire pour les équations d'Euler compressibles.)

On cherche une solution auto-similaire, discontinue, à symétrie plane, cylindrique ou sphérique, pour les équations d'Euler compressibles (2.1). On se place dans un gaz de Van der Waals à coefficients calorimétriques constants, le gaz devant le choc étant homogène et au repos. Dans le cas de la focalisation, le choc atteignant l'origine en $t = 0$, on a alors :

- la variable d'auto-similarité est de la forme $\xi = \frac{r}{A(-t)^\alpha}$, où $\alpha \in [0, 1]$ et A est une constante,
- la distance du choc à l'origine à l'instant t est donnée par la fonction $R(t) = A(-t)^\alpha$,
- le choc se déplace à la vitesse $U = R'(t) = \frac{\alpha R(t)}{(-t)} = \alpha A(-t)^{\alpha-1}$.

Puisque les dérivées en τ disparaissent lorsqu'on cherche une solution auto-similaire, on désigne désormais par ' la dérivation par rapport à ξ ; et le système (3.1) devient :

$$\begin{cases} \frac{\xi w'}{w}(y - 1) + \xi y' + (1+j)y & = 0, \\ \xi y'(y - 1) + y(y - \frac{1}{\alpha}) + \frac{1}{\gamma}(1 - \theta\rho_1 w)(\xi z' + 2z) + \frac{z}{\gamma w}(1 - 2\theta\rho_1 w)\xi w' & = 0, \\ \xi z'(y - 1) + 2z(y - \frac{1}{\alpha}) + z \frac{\gamma - 1 + 2\theta\rho_1 w}{1 - \theta\rho_1 w}(\xi y' + (1+j)y) & = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Remarque : Le système (3.2) n'est pas autonome en ξ mais il l'est en $\ln(\xi)$!

On réécrit maintenant le système (3.2) sous forme matricielle :

$$\xi A(w, y, z) \times (w', y', z')^t = B(w, y, z).$$

De façon plus explicite :

$$\xi \begin{pmatrix} \frac{y-1}{w} & 1 & 0 \\ \frac{z}{\gamma w}(1-2\theta\rho_1 w) & y-1 & \frac{1}{\gamma}(1-\theta\rho_1 w) \\ 0 & \frac{\gamma-1+2\theta\rho_1 w}{1-\theta\rho_1 w} & \frac{y-1}{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (j+1)y \\ y(y-\frac{1}{\alpha}) + \frac{2z}{\gamma}(1-\theta\rho_1 w) \\ 2y - \frac{2}{\alpha} + (1+j)y\frac{\gamma-1+2\theta\rho_1 w}{1-\theta\rho_1 w} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Ainsi, on s'est ramené à un système non-résolu et autonome en $\ln(\xi)$. Pour poursuivre, on voudrait inverser la matrice $A(w, y, z)$. On en calcule donc le déterminant. Lorsque celui-ci sera non-nul, il suffira alors de calculer les déterminants de Cramer de l'équation matricielle (3.3) pour obtenir un système différentiel ordinaire, autonome en $\ln(\xi)$.

On trouve comme expression pour le déterminant de $A(w, y, z)$:

$$\det A(w, y, z) = \frac{(1-y)}{w} \underbrace{(z - (y-1)^2)}_{=: \Delta(y, z)}.$$

qui s'annule donc sur les surfaces $\{\Delta = 0\}$ et $\{y = 1\}$.

D'autre part, les déterminants de Cramer sont :

$$\begin{aligned} \Delta_1(w, y, z) &= \frac{y}{z}(y-1) \left((y - \frac{1}{\alpha}) - (j+1)(y-1) \right) + \frac{2}{\gamma}(\frac{1}{\alpha} - 1)(1 - \theta\rho_1 w), \\ \Delta_2(w, y, z) &= \frac{y-1}{wz} \left[\frac{2z}{\gamma}(1 - \theta\rho_1 w)(1 - \frac{1}{\alpha}) - y(y-1)(y - \frac{1}{\alpha}) + yz(1+j) \right], \\ \Delta_3(w, y, z) &= \frac{1}{w} \left[z \left(2(y-1) - \frac{2}{\gamma}(1 - 2\theta\rho_1 w)(\frac{1}{\alpha} - 1) \right) + \frac{\gamma-1+2\theta\rho_1 w}{1-\theta\rho_1 w} y(y-1)(y - \frac{1}{\alpha} - (1+j)(y-1)) \right. \\ &\quad \left. - 2(y-1)^2(y - \frac{1}{\alpha}) \right]. \end{aligned}$$

Lorsque le déterminant $\det A(w, y, z)$ est non-nul, le système (3.3) se réécrit donc :

$$\frac{d}{d(\ln(\xi))} \begin{pmatrix} w \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A(w, y, z)} \begin{pmatrix} \Delta_1(w, y, z) \\ \Delta_2(w, y, z) \\ \Delta_3(w, y, z) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Remarque : Dans le cas du gaz parfait (traité en particulier par Landau & Lifschitz [12]), on a $\theta = 0$ et donc w n'apparaît pas dans le quotient $\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{dz}{dy}$. Le problème revient alors à intégrer cette équation qui donne une expression de $z(y)$. Puis, en reportant dans $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{dw}{dy}$ et dans $\frac{\Delta}{\Delta_2} = \frac{d(\ln(\xi))}{dy}$, on pourra obtenir des expressions de $w(y)$ et de $\xi(y)$. Cependant deux problèmes apparaissent : d'une part, on ne connaît pas la valeur de α ; d'autre part, si on calcule les valeurs de z et de y en $\xi = 1$ (grâce aux conditions de Rankine-Hugoniot) et en $\xi = +\infty$ (par observation des expressions de u et de c^2), on

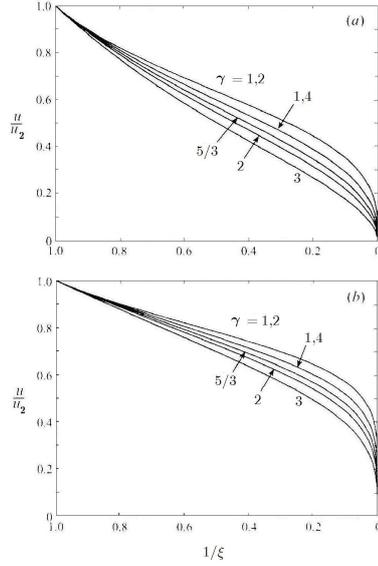


FIG. 3.2 – Vitesse du fluide, normalisée par rapport à sa valeur au niveau du choc (u_s), représentée comme une fonction de $1/\xi$, pour différentes valeurs de γ , pour un choc sphérique (a) ou cylindrique (b), dans le cas $\theta = 0$. Source = [4].

s'aperçoit que la surface d'équation $\Delta = 0$ est nécessairement traversée. Or la solution n'a pas de singularité entre $\xi = 1$ et $\xi = +\infty$. Pour que cette singularité soit factice, on cherche donc un point (w, y, z) pour lequel Δ , Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 s'annulent simultanément, ce qui est possible.

La plupart des auteurs, arrivés à ce point, résolvent numériquement, en testant des valeurs pour α . Ils obtiennent des figures telles les figures 3.2, 3.3, 3.4.

Ainsi, on peut inverser le système (3.3), hormis sur deux surfaces, où le déterminant de la matrice $A(w, y, z)$ s'annule. Pour savoir si cette singularité est traversée ou non, on regarde les valeurs limites des inconnues w , y et z .

3.2.2 Valeurs limites.

Valeurs de w , y , z en $\xi = 1$.

On peut calculer les valeurs de w , y et z en 1 en écrivant les conditions de Rankine-Hugoniot. En reprenant (2.5) on obtient :

$$1 - \frac{u_2}{U} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1 - \frac{2(1 - \theta\rho_1)(M^2 - 1)}{M^2(\gamma + 1)},$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma(M^2 - 1)}{\gamma + 1}.$$

Or, si on appelle Γ la surface de discontinuité, ω_2 la zone derrière le choc,

$$\rho_2 = \lim_{(t,r) \rightarrow \Gamma, (t,r) \in \omega_2} \rho(t, r) = \rho_1 \lim_{\xi \rightarrow 1} w(\xi).$$

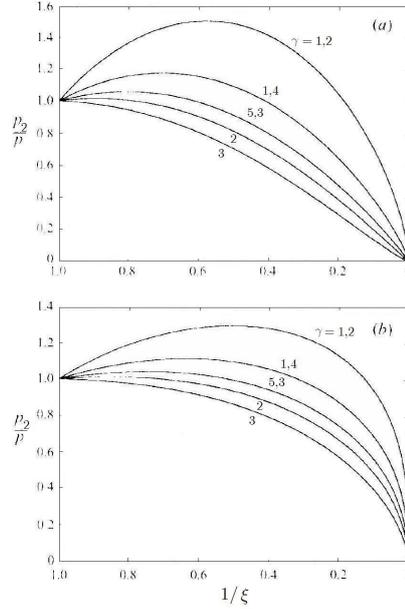


FIG. 3.3 – Inverse de la pression, normalisée par rapport à sa valeur au niveau du choc, montrée comme une fonction de $1/\xi$ pour différentes valeurs de γ , pour un choc sphérique (a) ou cylindrique (b), dans le cas $\theta = 0$. Source = [4].

De même $u_2 = \lim_{(t,r) \rightarrow \Gamma} \frac{\alpha r}{t} y(\xi)$ et $c_2^2 = \frac{\gamma p_2}{\rho_2(1-\theta\rho_2)} = \lim_{(t,r) \rightarrow \Gamma} \left(\frac{\alpha r}{t}\right)^2 z(\xi)$.

Ceci se traduit, sachant que $U = R'$, $t \frac{R'}{R} = \alpha$, $v_i = U - u_i$ et $u_1 = 0$, par :

$$\begin{aligned} w(1) &= \frac{M^2(\gamma + 1)}{M^2(\gamma - 1 + 2\theta\rho_1) + 2(1 - \theta\rho_1)}, \\ y(1) &= \frac{2(1 - \theta\rho_1)(M^2 - 1)}{M^2(\gamma + 1)}, \\ z(1) &= \frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{2\gamma(M^2 - 1)}{\gamma + 1}\right) \left(1 - \frac{2(1 - \theta\rho_1)(M^2 - 1)}{M^2(\gamma + 1)}\right) \\ &\quad \left(1 + \frac{2\theta\rho_1(M^2 - 1)}{M^2(\gamma + 1) - 2(M^2 - 1)}\right), \\ &= (1 - y(1))^2 \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{M^2(\gamma - 1) + 2}. \end{aligned}$$

Remarques :

- Comme $M \gg 1$, on a $y(1) > 0$ (ce qu'on espérait).
- $1 - y(1) = \frac{M^2(\gamma - 1 + 2\theta\rho_1) + 2(1 - \theta\rho_1)}{M^2(\gamma + 1)} \geq 0$, et donc $y(1) \leq 1$.
- $z(1) - (1 - y(1))^2 = (1 - y(1))^2 \frac{(\gamma + 1)(M^2 - 1)}{M^2(\gamma - 1) + 2} \geq 0$.

Le point $(y(1), z(1))$ est donc au-dessus de la parabole d'équation $z = (y - 1)^2$ dans le plan (y, z) .

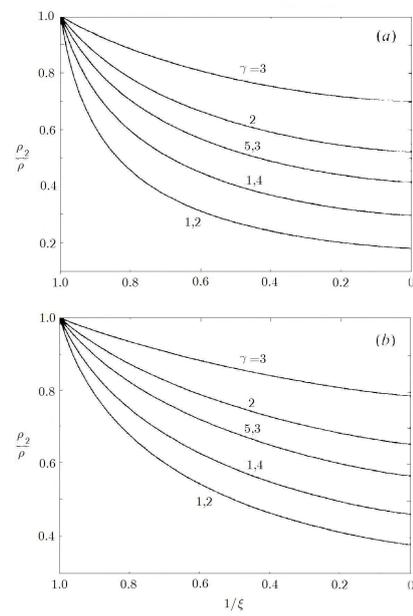
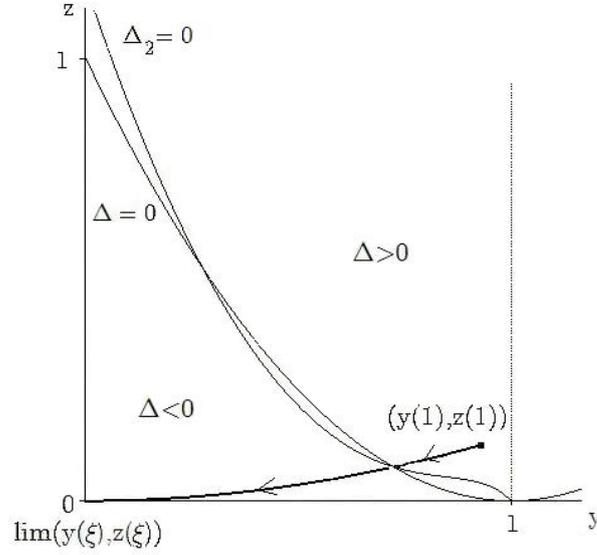


FIG. 3.4 – Inverse de la densité, normalisée par rapport à sa valeur au niveau du choc, représentée comme une fonction de $1/\xi$ pour différentes valeurs de γ , pour un choc sphérique (a) ou cylindrique (b), dans le cas $\theta = 0$. Source = [4].

FIG. 3.5 – Portrait de phase dans le plan (y, z) , dans le cas de l'implosion.**Valeurs en $\xi = +\infty$.**

En observant les expressions de u et de c^2 , on peut en déduire facilement les limites de y et z quand ξ tend vers $+\infty$. En effet, à r fixé, quand $t \rightarrow 0^-$, $\xi \rightarrow +\infty$; or les fonctions $u(t, r)$, $c^2(t, r)$ restent finies lorsque $t \rightarrow 0^-$. On a donc nécessairement :

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} y(\xi) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} z(\xi) = 0$$

En étudiant $(w, 0, 0)$ comme point fixe et en cherchant les valeurs propres de l'opérateur linéarisé en ce point, ce qui sera fait plus loin, on peut même trouver un équivalent de $y(\xi)$ et de $z(\xi)$ quand $\xi \rightarrow +\infty$: $y(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \xi^{-1/\alpha} y_\infty$, $z(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} \xi^{-2/\alpha} z_\infty$, où y_∞ et z_∞ sont des constantes.

Ainsi $(y(\infty), z(\infty)) = (0, 0)$ est au-dessous de la parabole d'équation $z = (y - 1)^2$ dans le plan (y, z) , et doit donc être traversée pour ξ fini (cf. fig. 3.5).

Proposition 3.2.2 (Valeurs limites de la solution auto-similaire de focalisation.)

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, dans le plan (y, z) , le point $(y(1), z(1))$ est au-dessus de la parabole d'équation $z = (y - 1)^2$ et le point $(y(\infty), z(\infty))$ est en-dessous. Nécessairement, la surface d'équation $\Delta = 0$ est donc traversée pour un ξ fini.

Invariant de Larrazza.

On pose $\kappa := \frac{2}{\gamma} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right)$.

On peut remarquer que dans le cas $j = 2$, le système possède un invariant, appelé *invariant de Larraza* :

$$L = \xi^2 Z [\xi^3 G (1 - V)]^{\gamma\kappa/3} \frac{(1 - \theta \rho_1 G)^{\gamma+1}}{G^{\gamma-1}}$$

On a en effet :

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\xi} &= \xi^{1+\gamma\kappa} z (1-y)^{\gamma\kappa/3} \frac{(1-\theta\rho_1 w)^{\gamma+1}}{w^{\gamma-1-\gamma\kappa/3} \Delta} \left[(2+\gamma\kappa)\Delta + \frac{\Delta_3}{z} + \frac{\gamma\kappa}{3} \frac{\Delta_2}{(y-1)} - \left(\frac{\gamma-1+2\theta\rho_1 w}{1-\theta\rho_1 w} - \frac{\gamma\kappa}{3} \right) \Delta_1 \right] \\ &= \gamma\kappa y (z - (y-1)^2) \left(\frac{j+1}{3} - 1 \right) \end{aligned}$$

Ainsi, quel que soit j , L est constant par rapport à ξ sur la surface d'équation $\Delta = 0$. De plus, pour $j = 2$, L est constant par rapport à ξ de part et d'autre du choc, et on peut calculer sa valeur en prenant $\xi = 1$. On obtient alors :

$$L = (2\gamma M^2 - (\gamma - 1)) \frac{(1 - \theta\rho_1)^{\gamma+1} (M^2(\gamma - 1) + 2)^\gamma}{(M^2(\gamma + 1))^{\gamma+1}}.$$

Un tel invariant peut éventuellement aider à trouver d'autres valeurs limites.

3.2.3 Point de passage à la singularité.

On retourne à l'étude du système (3.3), en sachant désormais que le passage $\Delta = 0$ pose effectivement problème.

Pour trouver un passage dans la surface de singularité, il faut nécessairement trouver un point tel que Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 s'annulent simultanément. Pour cela on réécrit les déterminant de Cramer en essayant d'isoler une partie proportionnelle à Δ . On obtient, avec les notations simplificatrices $\omega := \theta\rho_1 w$ et $\kappa := \frac{2}{\gamma}(\frac{1}{\alpha} - 1)$:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{z} \left[\kappa(1-\omega)\Delta(y, z) + \kappa(1-\omega)(y-1)^2 + y(y-1)(y-\frac{1}{\alpha}) - (j+1)y(y-1)^2 \right], \\ \Delta_2 &= \frac{y-1}{wz} \left[((j+1)y - \kappa(1-\omega))\Delta(y, z) - \kappa(1-\omega)(y-1)^2 - y(y-1)(y-\frac{1}{\alpha}) + (j+1)y(y-1)^2 \right], \\ \Delta_3 &= \frac{1}{w} \left[(2(y-1) - \kappa(1-2\omega))\Delta(y, z) + \frac{\gamma-1+2\omega}{1-\omega} \left(\kappa(1-\omega)(y-1)^2 + y(y-1)(y-\frac{1}{\alpha}) - (j+1)y(y-1)^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

En introduisant $Q(w, y) = -(1 - \theta\rho_1 w)(y - 1) - y(y - \frac{1}{\alpha}) + (j + 1)y(y - 1)$, on a donc :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{z} [\kappa(1-\omega)\Delta(y, z) - (y-1)Q(w, y)], \\ \Delta_2 &= \frac{y-1}{wz} [((j+1)y - \kappa(1-\omega))\Delta(y, z) + (y-1)Q(w, y)], \\ \Delta_3 &= \frac{1}{w} \left[(2(y-1) - \kappa(1-2\omega))\Delta(y, z) - \frac{\gamma-1+2\omega}{1-\omega}(y-1)Q(w, y) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi Δ , Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 s'annulent simultanément ssi $Q(w, y) = 0$.

Proposition 3.2.3 (Passage à la singularité.) *Sous les hypothèses énoncées en début de chapitre, pour traverser la singularité en temps fini il faut nécessairement passer par un point d'intersection entre les surfaces d'équation $\Delta(y, z) = z - (y - 1)^2 = 0$ et $Q(w, y) = 0$, où :*

$$Q(w, y) = -(1 - \theta\rho_1 w)(y - 1) - y(y - \frac{1}{\alpha}) + (j + 1)y(y - 1)$$

On trouve alors des courbes de points potentiellement acceptables.

En outre, à w fixé, $Q(w, y)$ est un polynôme de degré 2 en y et admet donc au plus deux racines. Ainsi, on a au plus deux courbes de points de passage potentiels.

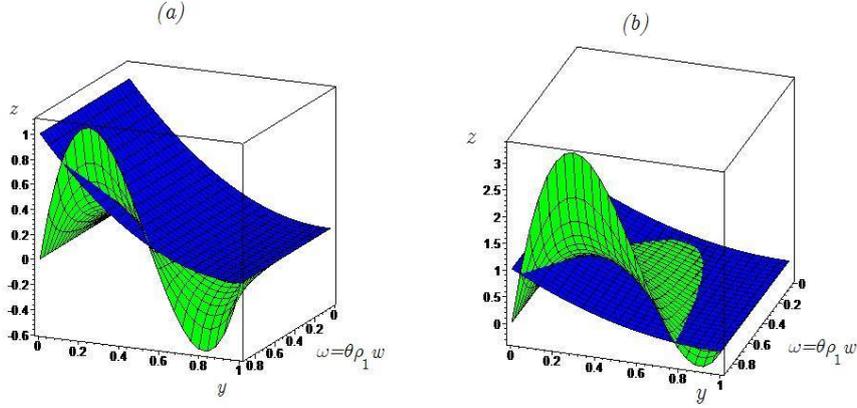


FIG. 3.6 – Intersections de $\Delta(y, z)$ et de $\Delta_1(w, y, z)$ pour une solution sphérique ($j = 2$), pour $\gamma = 7/5$, avec $\alpha = 0, 55$ (a) et $\alpha = 0, 7$ (b).

Racines de $Q(w, y)$.

En traçant les intersections des surfaces $\Delta(y, z) = 0$ et $\Delta_1(w, y) = 0$, on s'aperçoit rapidement que, à j et γ fixés, les deux surfaces n'ont pas toujours de point d'intersection, ce qui pourrait donner une borne inférieure pour la valeur de α (cf. fig. 3.6). On essaie donc de calculer plus précisément les racines de $Q(w, y)$.

On a : $Q(w, y) = jy^2 + y(\frac{\gamma\kappa}{2} - j - \kappa(1 - \omega)) + \kappa(1 - \omega)$.

À ω fixé (i.e. à w fixé), $Q(w, y)$ est donc un polynôme de degré deux en y qui admet des racines réelles ssi son discriminant $\delta(\kappa)$ est positif. On fixe désormais ω ; on trouve :

$$\delta(\kappa) = \left(\frac{\gamma}{2}\kappa - j - \kappa(1 - \omega)\right)^2 - 4j\kappa(1 - \omega) \geq 0.$$

Or, on s'aperçoit que $\delta(\kappa)$ est un polynôme de degré deux en κ , qui admet toujours deux racines positives :

$$\kappa_- = \frac{j}{\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}} + \sqrt{1 - \omega}\right)^2} \text{ et } \kappa_+ = \frac{j}{\left(\sqrt{\frac{\gamma}{2}} - \sqrt{1 - \omega}\right)^2}$$

Pour que $Q(w, y)$ admette des racines réelles, on doit donc avoir : $\kappa \leq \kappa_-$ ou $\kappa \geq \kappa_+$. Dans ce cas, on peut alors calculer les racines de $Q(w, y)$:

$$y_{\pm} = \frac{1}{2j} \left(-\left(\frac{\gamma}{2} - 1 + \omega\right)\kappa + j \pm \sqrt{\delta(\kappa)} \right)$$

Or $\delta(\kappa) \leq \left(\frac{\gamma}{2}\kappa - j - \kappa(1 - \omega)\right)^2$, donc y_{\pm} est du signe de $-\left(\frac{\gamma}{2} - 1 + \omega\right)\kappa + j$. On veut $y_{\pm} \in [0, 1]$, il vient donc la condition, pour avoir $y_{\pm} \geq 0$:

$$(\gamma/2 - 1 + \omega)\kappa \leq j. \quad (3.5)$$

D'autre part, la condition $y_{\pm} \leq 1$ implique

$$\pm \sqrt{\delta(\kappa)} \leq j + \left(\frac{\gamma}{2} - 1 + \omega\right)\kappa. \quad (3.6)$$

Il y a alors deux sous-cas :

1. soit $\frac{\gamma}{2} - 1 + \omega \geq 0$, la condition (3.5) devient $\kappa \leq \kappa_0 := \frac{j}{\frac{\gamma}{2} - 1 + \omega}$.
Or $\kappa_- \leq \kappa_0 \leq \kappa_+$, on a donc finalement comme condition : $\kappa \leq \kappa_-$, la condition (3.6) étant automatiquement vérifiée puisque $\delta(\kappa) \leq \left(\frac{\gamma}{2}\kappa - j - \kappa(1 - \omega)\right)^2$;
2. soit $\frac{\gamma}{2} - 1 + \omega \leq 0$, la condition (3.5) devient alors triviale.
Pour y_+ : la condition (3.6) est toujours vérifiée, on reste alors sur la condition : $\kappa \leq \kappa_-$ ou $\kappa \geq \kappa_+$.
De plus $Q(w, 0) = \kappa(1 - \omega) \geq 0$, $Q(w, 1) = \frac{\gamma\kappa}{2} \geq 0$, donc si $Q(w, y)$ s'annule déjà une fois entre 0 et 1, alors sa deuxième racine est aussi entre 0 et 1, éventuellement confondue, et y_- est donc entre 0 et 1 si y_+ y est déjà.

Proposition 3.2.4 (Borne inférieure pour le coefficient d'auto-similitude α .) *Sous les hypothèses énoncées en début de chapitre, lorsqu'on cherche une solution auto-similaire, le coefficient d'auto-similitude α donné dans la proposition 3.2.1 vérifie :*

1. si $\frac{\gamma}{2} - 1 + \omega \geq 0$, $\alpha \geq \frac{1}{1 + j}$;
2. si $\frac{\gamma}{2} - 1 + \omega \leq 0$, $\frac{1}{1 + j} \leq \alpha$ ou $\alpha \leq \frac{1}{1 + \frac{j}{(1 - \sqrt{2(1 - \omega)/\gamma})^2}}$.

On a maintenant une borne inférieure pour α , et pour de bonnes valeurs de α , on sait désormais que $Q(w, y)$ admet deux racines réelles entre 0 et 1. Cependant, ceci ne permet pas de spécifier quels points des courbes d'équations $\{\Delta(y, z) = 0$ et $Q(w, y) = 0\}$ sont réellement des points de passage. En outre, on ne connaît pas bien le comportement de la courbe solution dans le portrait de phase.

Ainsi, on est amené à s'intéresser aux points fixes du système et à chercher leur nature.

3.2.4 Portrait de phases.

Renormalisation.

D'après la théorie des équations différentielles ordinaires, pour un système autonome on a la proposition suivante, notamment explicitée dans le cours de S. Benzoni [2] :

Proposition 3.2.5 *Le portrait de phases d'un champ de vecteurs f , de classe C^1 sur un ouvert U d'un espace de Banach X dans X , coïncide avec le portrait de phases de tout champ de vecteurs de la forme λf , où $\lambda \in C^1(U; \mathbb{R}_+^*)$.*

Ainsi, le système (3.4) étant autonome, on peut le renormaliser de part et d'autre de la surface d'équation $\Delta(y, z) = z - (y - 1)^2 = 0$ en le multipliant par $wz \det A(w, y, z) = z(1 - y)(z - (y - 1)^2)$, de sorte que la singularité disparaisse.

Là où $\Delta(y, z) > 0$, la proposition 3.2.5 peut être appliquée directement, puisqu'on s'intéresse ici à $y \in [0, 1]$ et $z > 0$.

Là où $\Delta(y, z) < 0$, on obtiendra le portrait de phase du système renversé : il suffira pour

revenir au portrait de phase du système initial d'inverser le sens des flèches sur les courbes intégrales dans la zone où $\Delta < 0$.

On va donc s'intéresser maintenant au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{d\ln(\xi)} = wy(y-1) \left((y - \frac{1}{\alpha}) - (j+1)(y-1) \right) + wz\kappa(1 - \theta\rho_1w), \\ \frac{dy}{d\ln(\xi)} = (y-1) [z\kappa(1 - \theta\rho_1w) - y(y-1)(y - \frac{1}{\alpha}) + yz(1+j)], \\ \frac{dz}{d\ln(\xi)} = z \left[z(2(y-1) - \kappa(1 - 2\theta\rho_1w)) + \frac{\gamma-1+2\theta\rho_1w}{1-\theta\rho_1w} y(y-1)(y - \frac{1}{\alpha}) - (1+j)(y-1) - 2(y-1)^2(y - \frac{1}{\alpha}) \right]. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

qui s'écrit également :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{d\ln(\xi)} = w[\kappa(1 - \omega)\Delta(y, z) - (y-1)Q(w, y)], \\ \frac{dy}{d\ln(\xi)} = (y-1) [(j+1)y - \kappa(1 - \omega)] \Delta(y, z) + (y-1)Q(w, y), \\ \frac{dz}{d\ln(\xi)} = z \left[(2(y-1) - \kappa(1 - 2\omega)) \Delta(y, z) - \frac{\gamma-1+2\omega}{1-\omega} (y-1)Q(w, y) \right]. \end{array} \right.$$

D'après la théorie des équations différentielles ordinaires (cf. cours de S. Benzoni [2] et annexe C) pour connaître le portrait de phase au voisinage d'un point fixe hyperbolique, il suffit d'appliquer le théorème de Hartman-Grobman.

On cherche donc les points fixes, puis les valeurs propres du linéarisé en ces points.

Points fixes.

Après calculs, on obtient comme points fixes, pour le système (3.7) :

$$(w, 1, 0), \quad (0, \frac{1}{\alpha}, 0), \quad (w, 0, 0), \\ (0, y_1 = \frac{2+\gamma\kappa}{2+(j+1)(\gamma-1)}, (y_1 - 1)^2 - \frac{(y_1-1)Q(0, y_1)}{(j+1)y_1 - \kappa}), \quad (w_0, y_0, z_0) \quad \text{quand } \Delta(y_0, z_0) = Q(w_0, y_0) = 0.$$

Comme $1/\alpha > 1$, on ne s'intéressera pas au point $(0, \frac{1}{\alpha}, 0)$; on ne s'intéressera pas plus aux points $(w, 1, 0)$.

Linéarisé en $(w, 0, 0)$.

On obtient la matrice :

$$L_{(w,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma\kappa}{2} - j & w\kappa(1 - \omega) \\ 0 & \frac{1}{2}(\gamma\kappa + 2) & \kappa(1 - \omega) \\ 0 & 0 & \gamma\kappa + 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $L_{(w,0,0)}$ sont $0, \frac{1}{2}(\gamma\kappa + 2)$, et $(\gamma\kappa + 2)$. Dans le cas $\theta = 0$, le problème est invariant par translation selon l'axe (Ow) , on peut donc se ramener à l'étude du portrait de phase dans le plan (y, z) , par projection, ce qui nous ramène à l'étude de deux valeurs propres. On trouve alors que dans le plan (y, z) le point $(0, 0)$ est un nœud répulsif (source). Cependant, Δ étant négatif dans la zone contenant l'origine, le sens de parcours des courbes intégrales est inversé. En outre, on peut calculer les tangentes des courbes intégrales à

l'origine qui sont les vecteurs propres de la matrice linéarisée. Plus précisément, dans le plan (y, z) , toutes les trajectoires vont arriver selon le vecteur associé à la valeur propre de plus grande valeur absolue, sauf une qui arrivera selon le vecteur propre associé à la valeur propre de plus petite valeur absolue. Les vecteurs propres sont ici :

$$\begin{aligned} r_1 &= (1, 0, 0) && \text{associé à } 0, \\ r_2 &= \left(\frac{\gamma\kappa}{2} - j, \frac{\gamma\kappa}{2} + 1, 0\right) && \text{associé à } \frac{\gamma\kappa}{2} + 1, \\ r_3 &= \left(-(\gamma\kappa + 1 - j), \gamma\kappa + 2, \frac{(\gamma\kappa + 2)^2}{2\kappa(1-g)}\right) && \text{associé à } \gamma\kappa + 2. \end{aligned}$$

Dans le cas $\theta \neq 0$, on ne peut pas projeter dans le plan (y, z) et il faudrait étudier les variétés stables, instables et centrales.

Linéarisé en (w_0, y_0, z_0) **tels que** $\Delta(y_0, z_0) = Q(w_0, y_0) = 0$.

On obtient :

$$L_{(w_0, y_0, z_0)} = \begin{pmatrix} -\kappa\theta\rho_1 w(y-1)^2 & -w(y-1)[\kappa(1-\omega) + 2yj + \frac{\gamma\kappa}{2} - j] \\ (y-1)^3 \kappa\theta\rho_1 & (y-1)^2[-2y + \kappa(1-\omega) + \frac{\gamma\kappa}{2} - j] \\ -(y-1)^4 \frac{\gamma-1+2\omega}{1-\omega} \kappa\theta\rho_1 & -(y-1)^3[4(y-1) + \frac{\gamma-1+2\omega}{1-\omega}(2yj + \frac{\gamma\kappa}{2} - j) - \kappa(\gamma+1-2\omega)] \\ w\kappa(1-\omega) \\ (y-1)((j+1)y - \kappa(1-\omega)) \\ (y-1)^2(2(y-1) - \kappa(1-2\omega)) \end{pmatrix}$$

Pour un gaz parfait, ceci devient :

$$L_{(w_0, y_0, z_0)} = \begin{pmatrix} 0 & -w(y-1)[\kappa + 2yj + \frac{\gamma\kappa}{2} - j] \\ 0 & (y-1)^2[-2y + \kappa + \frac{\gamma\kappa}{2} - j] \\ 0 & -z(y-1)[4(y-1) + (\gamma-1)(2yj + \frac{\gamma\kappa}{2} - j) - \kappa(\gamma+1)] \\ w\kappa \\ (y-1)((j+1)y - \kappa) \\ z(2(y-1) - \kappa) \end{pmatrix}$$

Remarque : pour ne pas alourdir les notations, on s'est exonéré de l'indice 0, cependant il s'agit bien dans cette matrice des points de passage potentiels étudiés précédemment, en section 3.2.3.

On voudrait maintenant calculer les valeurs propres de cette matrice et en étudier les signes.

Dans le cas $\theta = 0$, on projette comme précédemment dans le plan (y, z) : la singularité du système initial (3.4) peut seulement être traversée en temps fini aux nœuds ou aux cols du système renormalisé (3.7) ; et puisque l'origine est un nœud répulsif pour le système renormalisé, il faut que les lignes de champs du système initial (3.4) aillent de la zone au-dessus de la parabole vers la zone en-dessous de la parabole, lorsqu'on projette dans le plan (y, z) (cf. fig.3.5).

Or, pour un système 2×2 , si les valeurs propres sont de signes contraires, on a un col ; si elles sont toutes les deux positives, on a une source ; si elles sont toutes les deux négatives on a un puits.

Si on a un col à la singularité, en projetant sur le plan (y, z) , on peut en effet passer en

empruntant une séparatrice du système renormalisé.

Si on a un nœud, nécessairement celui-ci doit être attractif puisqu'on veut aller de la zone au-dessus de la parabole pour arriver à l'origine quand $\xi \rightarrow \infty$.

Finalement, si on oublie la valeur propre associée à l'invariance selon w (qui sera 0), il nous reste deux valeurs propres pour cette matrice, qui doivent être

- soit de signes contraires,
- soit toutes les deux négatives.

Le cas général se traite de façon assez semblable, quoique plus compliquée, puisqu'il faut trouver les variétés stables, instables et centrales.

Remarque : On aurait aimé appliquer le théorème de Variété invariante de Fénichel. Toutefois, la tentative est restée vaine, puisqu'en effectuant le changement de variable $w \rightarrow \tilde{w}/\theta$, le paramètre θ disparaît complètement.

On calcule le polynôme caractéristique de la matrice $L_{(w_0, y_0, z_0)}$ dans le cas général; on obtient :

$$\begin{aligned} \det(L_{(w_0, y_0, z_0)} - \lambda Id) = & -\lambda(y-1)^4 \left[\left(\frac{\lambda}{(y-1)^2} \right)^2 + \frac{\lambda}{(y-1)^2} \left(j + 2 - \frac{\gamma\kappa}{2} \right) \right. \\ & \left. + (\kappa(1 - \gamma/2) + j - 2jy) \left(2 - 2y - \frac{\gamma-1+2\omega}{1-\omega} (1+j)y + \gamma\kappa \right) \right] \end{aligned}$$

Déjà 0 est valeur propre; elle correspond à une invariance en w .

Pour étudier le signe des autres valeurs propres, il faut alors étudier les racines d'un polynôme de degré deux.

On est donc amené à chercher le signe de $C := (\kappa(1 - \gamma/2) + j - 2jy_0) \left(2 - 2y_0 - \frac{\gamma-1+2\omega}{1-\omega} (1+j)y_0 + \gamma\kappa \right)$ puisque :

- si C est négatif, les deux valeurs propres sont de signes contraires et on aura un col;
- si C est positif on aura deux valeurs du même signe que $-(j + 2 - \frac{\gamma\kappa}{2})$.

Si la condition $\kappa \leq \kappa_-$ est vérifiée, les deux valeurs propres seront donc négatives et on aura un point fixe attractif.

On trace C en fonction de α et de ω pour $j = 2$, $\gamma = 1$, avec $y_0 = y_{\pm}$ racine de $Q(w, y)$ (cf.fig. 3.7). On peut même observer l'évolution de cette surface en faisant varier γ : avec $\gamma = 3$, on obtient les courbes de la figure 3.8.

On peut même tracer les valeurs propres pour différentes valeurs de γ (cf. fig. 3.9), ou encore pour $\theta = \omega = 0$ (cf.fig. 3.10).

Ainsi, on peut déterminer la nature du point fixe à la singularité. Sédov [22] trace même des portraits de phase du système renormalisé assez complets (cf.fig. 3.11).

On connaît désormais un peu mieux ce portrait de phase. Néanmoins, on ne sait toujours pas comment préférer un point de passage parmi tous ceux qui sont possibles.

Pour finir, on voudrait désormais s'attarder sur la stabilité de telles solutions.

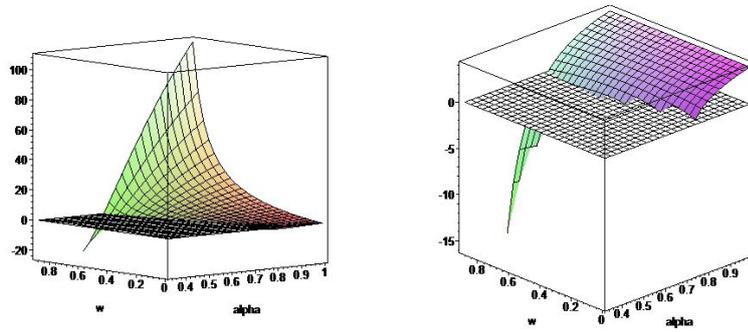


FIG. 3.7 – $C(\alpha, \omega)$, pour $j = 2$, $\gamma = 1$, $y_0 = y_+$ (à gauche) et $y_0 = y_-$ (à droite).

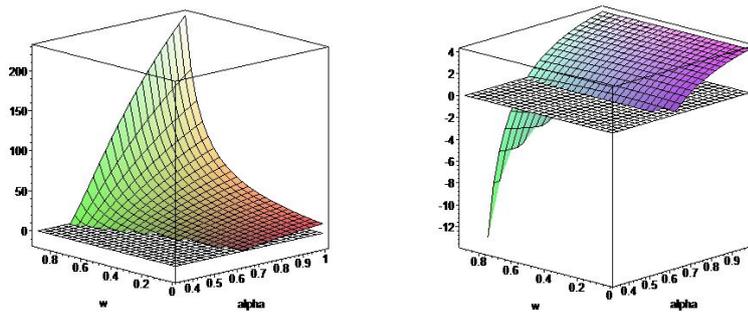


FIG. 3.8 – $C(\alpha, \omega)$, pour $j = 2$, $\gamma = 3$, $y_0 = y_+$ (à gauche) et $y_0 = y_-$ (à droite).

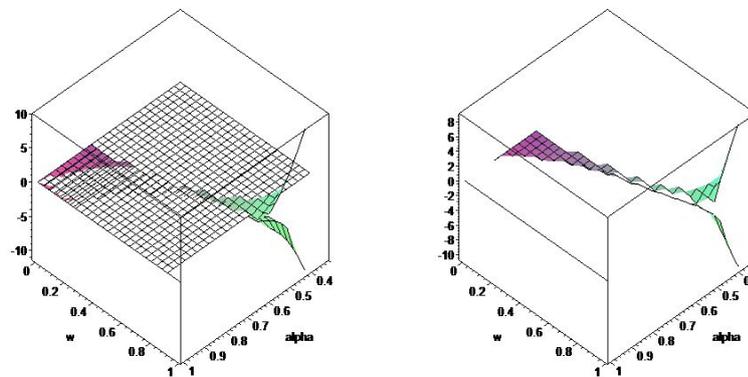


FIG. 3.9 – $\lambda_{\pm}(\alpha, \omega)$, pour $j = 2$, $y_0 = y_-$, $\gamma = 1$ (à gauche) et $\gamma = 2$ (à droite).

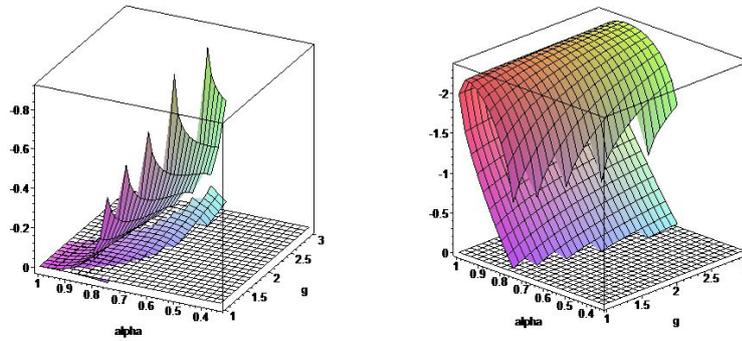


FIG. 3.10 – $\lambda_{\pm}(\alpha, \omega)$, pour $j = 2$, $\theta = 0$, $y_0 = y_+$ (à gauche) et $y_0 = y_-$ (à droite).

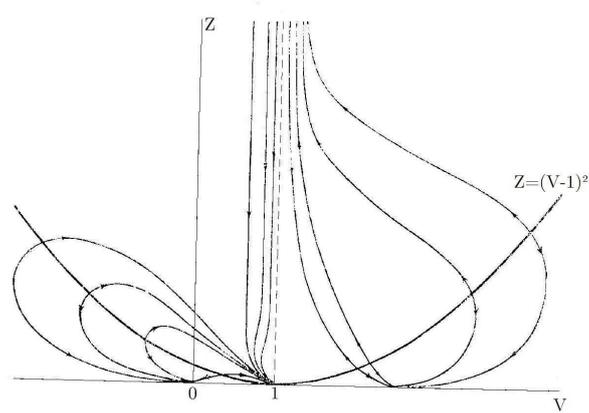


FIG. 3.11 – Champ de courbes intégrales dans le plan (V, Z) , dans le cas de l'implosion, pour $\alpha = 2/5$, $j = 2$ (cas sphérique) et $\gamma < 2$. Source : [22].

Chapitre 4

Stabilité des solutions sphériques.

Pour étudier la stabilité, on va tout d'abord chercher une équation de la surface de discontinuité pour tout temps, afin d'y ajouter ultérieurement une perturbation et d'étudier l'évolution de cette perturbation au cours du temps et celle de l'erreur relative.

4.1 Équation de la surface de discontinuité.

On voudrait établir le résultat suivant :

Proposition 4.1.1 (Développement asymptotique formel de l'équation de la discontinuité.)

On considère un gaz de Van der Waals dont les coefficients calorimétriques c_p et c_V sont constants. On étudie une solution à symétrie cylindrique ou sphérique, discontinue, des équations d'Euler compressibles pour un tel gaz. La surface de discontinuité Γ de cette solution se propage vers une zone où le gaz est homogène et au repos, caractérisé par $\rho_1 = \text{cste}$, $u_1 = 0$ et $c_1 = \text{cste}$. On a alors :

$$\Gamma = \{(t, r) \text{ tels que } \beta_0(r) = c_1 t\},$$

où c_1 est la vitesse du son dans le gaz devant le choc, avec l'estimation suivante :

$$\beta_0(r) \simeq \frac{C}{1 + 2/a} r^{1+2/a}. \quad (4.1)$$

Pour montrer cela, on cherche d'abord à estimer la façon dont évolue le nombre de Mach M en fonction de la section du choc, dans un tube de section variable. On pourra ensuite se ramener à des surfaces cylindrique ou sphérique en considérant des *tubes de rayons* — par exemple, on sera amené à dire qu'une sphère est composée de nombreux cônes — et on adaptera les calculs précédents aux cônes. On obtiendra alors une équation qui, couplée à d'autres relations, permettra de décrire une surface de discontinuité sphérique.

Pour étudier la stabilité, il suffira alors d'introduire une perturbation à l'équation de la surface de discontinuité et de voir comment cette perturbation évolue au cours du temps. Pour le moment on étudie l'évolution d'un choc dans un tube de section variable.

4.1.1 Mouvement d'un choc dans un tube de section variable.

Cette étude est notamment présente dans le livre de Whitham [27]. On considère ici un écoulement unidimensionnel : seule une variable d'espace x intervient. Soit un gaz de Van der Waals à coefficients calorimétriques constants dans un tube de section variable $A(x)$, $A(x)$ étant suffisamment régulière et variant lentement, avec $A(x) =$

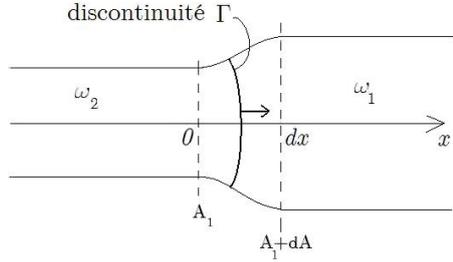


FIG. 4.1 – Tube de section variable.

A_1 pour $x \leq 0$ (cf. fig. 4.1). On suppose qu'une détonation en $x = -\infty$ crée un choc fort (i.e. pour lequel $M \gg 1$). On cherche alors une solution discontinue aux solutions d'Euler compressibles, qui ne s'écrivent plus comme (2.1), puisque la loi de conservation de la masse devient dans ce cas : $\partial_t(\rho A) + \partial_x(\rho u A) = 0$. Néanmoins, les deux autres équations sont encore valables.

Le système des équations d'Euler compressibles s'écrit alors, dans les zones régulières :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u \partial_x \rho + \rho \partial_x u + \rho u \frac{A'(x)}{A(x)} = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{\partial_x p}{\rho} = 0, \\ \partial_t p + u \partial_x p - c^2(\partial_t \rho + u \partial_x \rho) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

En outre, on complète notre approche d'une solution discontinue en écrivant les conditions de Rankine-Hugoniot, énoncées dans le lemme 2.2.1. On obtient, en considérant de nouveau que la zone 1 est la zone devant le choc, dans laquelle le gaz est homogène et au repos :

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{p_1} &= 1 + \frac{2\gamma(M^2 - 1)}{\gamma + 1}, \\ \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 1 - \frac{2(1 - \theta\rho_1)(M^2 - 1)}{M^2(\gamma + 1)}, \\ u_2 &= c_1 M \frac{2(1 - \theta\rho_1)(M^2 - 1)}{M^2(\gamma + 1)}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 \frac{M^2(\gamma - 1 + 2\theta\rho_1) + 2(1 - \theta\rho_1)}{M(\gamma + 1)} \sqrt{\frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma - 1)M^2 + 2}}, \\ m &= \sqrt{\frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}}, \end{aligned}$$

où m est le nombre de Mach relatif à la zone derrière le choc.

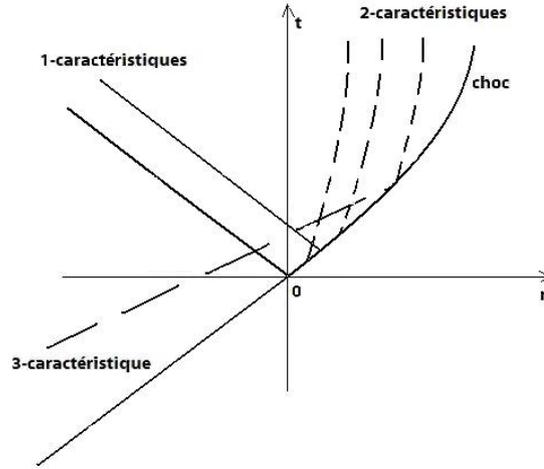


FIG. 4.2 – Courbes caractéristiques d'un choc 1D entrant en $t = 0$ dans une zone non-uniforme.

D'autre part, on peut écrire les équations caractéristiques de ce système hyperbolique*

$$\begin{aligned} C_1 & : \{ \partial_t + (u - c) \partial_x \} p - \rho c \{ \partial_t + (u - c) \partial_x \} u + \rho c^2 u \frac{A'}{A} = 0, \\ C_2 & : \{ \partial_t + u \partial_x \} p - c^2 \{ \partial_t + u \partial_x \} \rho = 0, \\ C_3 & : \{ \partial_t + (u + c) \partial_x \} p + \rho c \{ \partial_t + (u + c) \partial_x \} u + \rho c^2 u \frac{A'}{A} = 0. \end{aligned}$$

Comme on considère un tube dont la section varie peu, dont la section initiale a pour aire A_1 , on peut linéariser les équations autour de (ρ_2, u_2, p_2) , valeurs de (ρ, u, p) derrière le choc pour $x \leq 0$, données par les conditions de Rankine-Hugoniot. Les équations caractéristiques peuvent alors s'intégrer le long des courbes $(t, \chi_i(t))$ avec $\frac{d\chi_1}{dt} = u_2 - c_2$, $\frac{d\chi_2}{dt} = u_2$ et $\frac{d\chi_3}{dt} = u_2 + c_2$.

On trouve alors le long de C_3 l'équation suivante dans laquelle les termes d'ordre 2 en $p - p_2$, $u - u_2$ sont négligés :

$$(p - p_2) + \rho_2 c_2 (u - u_2) = -\frac{\rho_2 c_2^2 u_2}{u_2 + c_2} \frac{A(x) - A_1}{A_1} + k(x - (u_2 + c_2)t). \quad (4.3)$$

On a alors $k = 0$, puisque les caractéristiques partent toutes de la zone où $u = u_2$, $\rho = \rho_2$, $p = p_2$ (cf. fig. 4.2).

En outre, si on écrit les perturbations $p - p_2$, $u - u_2$ grâce aux conditions de Rankine-Hugoniot, à l'ordre 1 en $M - M_1$, M_1 étant la valeur de M dans la zone initiale de section A_1 , on trouve :

$$p - p_2 = \frac{4\rho_1 c_1^2}{\gamma + 1} M_1 (M - M_1), \quad u - u_2 = \frac{2(1 - \theta\rho_1)}{\gamma + 1} c_1 \left(1 + \frac{1}{M_1^2} \right) (M - M_1)$$

*Des précisions quant à l'hyperbolicité et quant aux équations caractéristiques sont données en annexe A.

Si on substitue ces expressions dans (4.3), on obtient :

$$\frac{4\rho_1 c_1^2}{\gamma + 1} M_1 (M - M_1) + \rho_2 c_2 \frac{2(1 - \theta\rho_1)}{\gamma + 1} c_1 \left(1 + \frac{1}{M_1^2}\right) (M - M_1) = -\frac{\rho_2 c_2^2 u_2}{u_2 + c_2} \frac{A(x) - A_1}{A_1}$$

i.e.

$$\frac{A - A_1}{A_1} = -(M - M_1) \frac{M_1}{M_1^2 - 1} f(M_1)$$

où

$$f(M_1) = \left(2m + (1 - \theta\rho_1) \left(1 + \frac{1}{M_1^2}\right)\right) \left(\frac{2m(M_1^2 - 1)}{M_1^2(\gamma - 1 + 2\theta\rho_1) + 2(1 - \theta\rho_1)} + \frac{1}{1 - \theta\rho_1}\right)$$

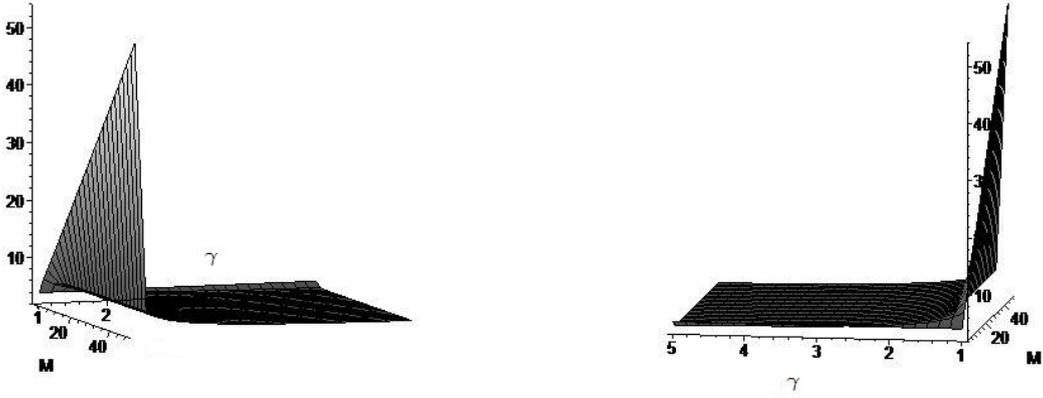


FIG. 4.3 – Fonction $M \mapsto f(M)$, lorsque $\theta = 0$.

4.1.2 Tube dont la section varie lentement.

Ici, on veut que les variations de section s'accroissent, par exemple comme pour un cône. Si on reprend l'étude précédente en l'appliquant à des variations infinitésimales de section, on obtient que A et M sont reliés par l'équation différentielle :

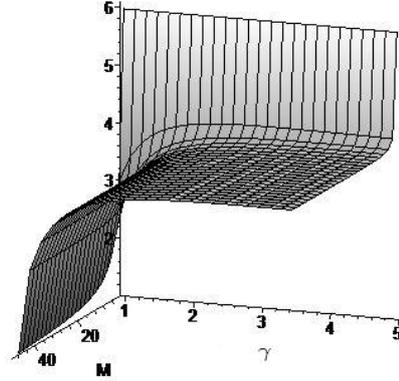
$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = -\frac{M}{M^2 - 1} f(M) \frac{dM}{dx} \quad (4.4)$$

Cependant ceci n'est pas tout à fait exact, puisque la fonction k ne s'annule plus, la zone derrière le choc n'étant plus uniforme.

Cette équation est cependant relativement exacte, ayant été retrouvée par Chisnell (cf. [3]) par d'autres moyens.

On peut alors intégrer cette équation différentielle sous la forme $\frac{A}{A_1} = \frac{F(M)}{F(M_1)}$ où

$$F(M) = \exp \left\{ - \int \frac{M f(M)}{M^2 - 1} dM \right\}$$

FIG. 4.4 – Fonction $M \mapsto f(M)$, lorsque $\theta\rho_1 = 0, 5$.

Remarque : En traçant cette fonction [$M \mapsto f(M)$], on s'aperçoit que, pour M grand, cette fonction est presque constante. En fait, elle varie assez lentement pour que sa valeur en $+\infty$ donne une bonne approximation de sa valeur pour M assez grand (cf. fig. 4.3 et 4.4). On considère donc sa limite en $+\infty$:

$$f(M) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1 + 2 \left(\frac{1}{1 - \theta\rho_1} + \frac{1 - \theta\rho_1}{\gamma - 1 + 2\theta\rho_1} \right) \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} + 2 \frac{\gamma - 1}{\gamma(\gamma - 1 + 2\theta\rho_1)} =: a,$$

et on remplace $f(M)$ par sa valeur en $+\infty$ dans (4.4). On obtient une équation différentielle facile à intégrer. On obtient : $M^2 - 1 = \text{Cste} \cdot A^{\frac{-2}{a}}$.

On obtient un équivalent (approximatif[†]) de M quand $A \rightarrow 0$: $M \underset{A \rightarrow 0}{\sim} \text{Cste} A^{\frac{-1}{a}}$.

On se ramène au cas sphérique en considérant des cônes (pour lesquels A est proportionnel à $(x - x_0)^2 = R^2$). Alors : $M \underset{R \rightarrow 0}{\sim} \text{Cste} R^{\frac{-2}{a}}$.

Dans le cas cylindrique, A est proportionnel à $(x - x_0) = R$; d'où : $M \underset{R \rightarrow 0}{\sim} \text{Cste} R^{\frac{-1}{a}}$. Et M tend vers l'infini lorsque le rayon de la discontinuité tend vers 0.

Remarque : Ces calculs permettent d'obtenir une valeur approchée du coefficient de similarité, dans le cas d'une solution cylindrique ou sphérique. On trouve en effet : $M \underset{M \rightarrow +\infty}{\sim} \text{Cste} R^{\frac{-j}{a}}$.

Le coefficient exact donnant la puissance de R serait en fait : $1 - \frac{1}{\alpha}$. Par identification des coefficients, on obtient donc : $\alpha \simeq \frac{a}{j+a}$.

4.1.3 Approximation par des tubes de rayons.

On considère que chaque élément du front de choc pour la solution auto-similaire étudiée dans le chapitre 3 se propage dans un tube dont les parois sont perpendiculaires au front

[†]Il faudrait déterminer dans quelle mesure cette approximation est valable!

de choc. De même que Whitham (cf. [27], chap. 8) et Evans (cf. [8]), on écrit la position du choc au temps t sous la forme : $\beta(x) = c_1 t$. La vitesse de la surface d'équation $c_1 t - \beta(x) = 0$ est alors $U = \frac{c_1}{|\nabla\beta|}$, et donc :

$$M = \frac{1}{|\nabla\beta|} \quad (4.5)$$

D'autre part, en appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky appliqué à un tube de rayons élémentaire (cf. Whitham [27]), on obtient la relation : $\nabla \cdot \left(\frac{\nabla\beta/|\nabla\beta|}{A} \right) = 0$ qui peut aussi s'écrire :

$$\nabla \cdot \left(\frac{M\nabla\beta}{A} \right) = 0 \quad (4.6)$$

On reprend également l'équation obtenue précédemment dans la section 4.1.2 :

$$\frac{A}{A_1} = \frac{F(M)}{F(M_1)}. \quad (4.7)$$

Si on suppose que le choc est à symétrie sphérique, β ne dépend que du rayon r . Les équations précédentes s'écrivent donc : $M = - \left(\frac{d\beta_0}{dr} \right)^{-1}$, $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_r}{A} \right) = 0$ et $\frac{A}{A_1} = \frac{F(M)}{F(M_1)}$. La deuxième équation donne : $A = A_0 r^2$, où A_0 est une constante. On peut donc appliquer la remarque du paragraphe 4.1.2 et on trouve pour M une expression approchée du type $M = C^{-1} \cdot r^{-2/a}$.

Finalement, on obtient comme expression approchée pour $\beta_0(r)$:

$$\beta_0(r) = - \frac{C}{1 + 2/a} r^{1+2/a}. \quad (4.8)$$

Et on a retrouvé le résultat énoncé au début de cette section.

4.2 Perturbation.

On s'interroge maintenant sur la stabilité des solutions auto-similaires trouvées. Pour cela, on introduit une perturbation à l'équation (4.8) obtenue ci-dessus et on cherche à savoir si cette perturbation est amplifiée ou non au cours du temps.

On se base ici sur les études menées par Whitham (cf. [27], chap. 8), Wu & Roberts [20] et Evans (cf. [8]).

On pose :

$$\beta(r, \theta, \varphi) = \beta_0(r) + \varepsilon \mu(r) Y(\theta, \varphi),$$

avec : $\beta_0(r) = - \frac{C}{1+2/a} r^{1+2/a}$.

Comme les harmoniques sphériques (i.e. les parties angulaires des valeurs propres du laplacien) constituent une famille complète sur la sphère (cf. Strauss [26], chap. 10.3), il suffit de prendre pour Y l'harmonique sphérique : $Y = P_n^m(\theta) \cos(m\varphi)$, où $P_n^m(\theta)$ est le polynôme de Legendre : $P_n^m(\theta) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (1 - \theta^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}}{d\theta^{n+m} [(1 - \theta^2)^n]}$, avec $n \geq 0$ et $-n \leq m \leq n$.

Y vérifie alors l'équation :

$$\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + n(n+1)Y = 0 \quad (4.9)$$

Des sphères déformées par de telles harmoniques sont représentées figure 4.5.

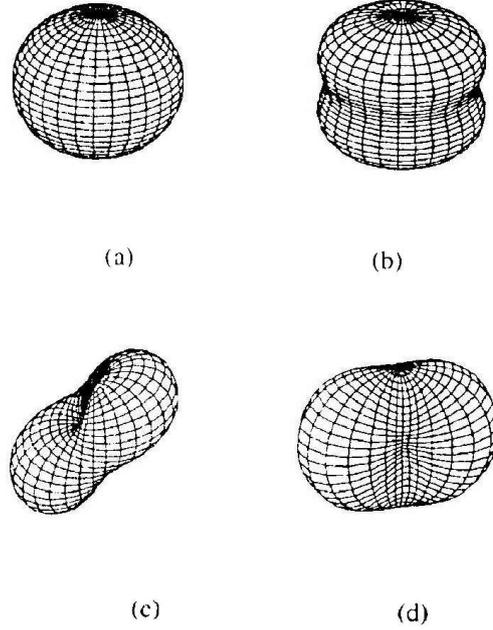


FIG. 4.5 – Déformations d'une sphère par les harmoniques sphériques pour $n = 2$. Source : [8].

On étudie les perturbations d'ordre 1 en ε : on reporte β dans les équations (4.5) et (4.6), et on utilise pour M grand l'approximation suivante où D est une constante :

$$M = Dr^{-1/a} \quad (4.10)$$

On obtient :

$$\nabla\beta = -Cr^{2/a}\mathbf{e}_r + \varepsilon \left(\frac{\partial\mu}{\partial r}Y\mathbf{e}_r + \frac{\mu}{r}\frac{\partial Y}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \right).$$

En utilisant les équations (4.10) et (4.5), on calcule $\frac{M\nabla\beta}{A}$ à l'ordre 1 en ε :

$$\frac{M\nabla\beta}{A} = \frac{1}{D^a C^{1+a} r^{2(1+1/a)}} \left(-(Cr^{2/a} + \varepsilon a \frac{\partial\mu}{\partial r}Y)\mathbf{e}_r + \frac{\varepsilon\mu}{r}\frac{\partial Y}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\varepsilon\mu}{r\sin\theta}\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi \right)$$

Puis on reporte cette valeur dans l'équation (4.6). Il vient finalement une équation différentielle pour μ , Y se simplifiant grâce à (4.9) :

$$ar^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2} - 2r \frac{\partial \mu}{\partial r} + n(n+1)\mu = 0$$

Les solutions élémentaires de cette équation sont alors les r^ν où

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(2+a)^2 - 4n(n+1)a}$$

On s'intéresse à l'erreur relative, c'est à dire au rapport $\frac{\mu}{\beta_0}$ qui est proportionnel à $r^{\nu-1-\frac{2}{a}}$.

Or $\nu - 1 - \frac{2}{a} = \frac{-(2+a) \pm \sqrt{(2+a)^2 - 4n(n+1)a}}{2a}$ est toujours de partie réelle négative.

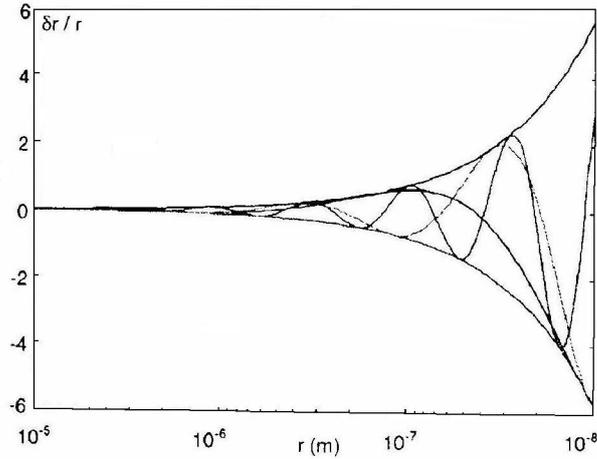


FIG. 4.6 – Croissance et oscillation de la déformation d’une onde de choc sphérique convergente. Le graphe montre l’erreur relative $\delta r/r$ pour des perturbations dues à des harmoniques sphériques avec $n = 2, 4$ et 8 , ainsi que l’enveloppe bornant l’amplitude des oscillations. Source : [8].

La perturbation diverge donc lorsque $r \rightarrow 0^+$ (cf. fig. 4.6). Néanmoins cette divergence n’est pas exponentielle, mais seulement en puissance inverse de r . De plus, lors du phénomène de sonoluminescence, du fait du volume des molécules, le choc n’atteint pas le centre de la bulle : il se réfléchit avant. Il suffit donc que la perturbation n’ait pas trop augmenté au niveau de la réflexion pour que le phénomène physique soit stable (cf. Evans [8]). Ainsi la bulle n’est pas détruite par le premier choc, et l’éclair de lumière peut apparaître plus qu’une fois, de sorte que le phénomène soit visible.

D’autre part, on a fait ici un grand nombre d’approximations sans les justifier, ce qu’il faudrait faire. On peut tout de même souligner la très bonne correspondance entre données théoriques et expérimentales, ce qui donne un certain crédit à ces calculs. Liu (cf. [13], [14]) s’est également intéressé à ce problème de stabilité, ainsi que Wu & Roberts [20], [21]. On peut donc énoncer la proposition :

Proposition 4.2.1 *On considère un gaz de Van der Waals dont les coefficients calorimétriques sont constants. La solution sphérique auto-similaire des équations d’Euler compressibles (2.1), dont la discontinuité se propage vers un gaz homogène et au repos est relativement stable, i.e. qu’elle est formellement instable et la perturbation croît lorsqu’il y a focalisation de l’onde de choc. Cependant, comme on a considéré un gaz de Van der Waals, on ne néglige pas le volume des molécules et l’onde de choc est réfléchi avant que la perturbation soit devenue prédominante.*

Conclusion.

Cette étude aura donc permis, d'une part de se familiariser avec les techniques permettant de traiter les équations aux dérivées partielles —notamment on s'est servi ici des courbes caractéristiques, d'invariants de Riemann, de groupes de Lie— ; d'autre part, on a essayé de mieux comprendre le portrait de phase associé au système des équations d'Euler compressibles dans le cas particulier de solutions auto-similaires. Enfin, on a étudié la stabilité de telles solutions et on s'est intéressé à un des phénomènes physiques associés. En outre, de nombreux problèmes sont apparus qui restent encore sans réponse, par exemple :

- Peut-on déterminer le coefficient d'auto-similarité α plus précisément ?
- Lorsque deux branches de solutions sont possibles, laquelle est empruntée et pourquoi ? Y a-t-il une bifurcation ?
- Peut-on mieux justifier les approximations faites dans le chapitre 4.2 ?

La stabilité des ondes de choc reste par ailleurs assez faible, ou pourrait donc désormais étudier comment évolue une bulle de cavitation ou une explosion lorsqu'une asymétrie est introduite dans le système.

L. Descamps [6], s'y intéresse notamment dans le cas de l'explosion, en examinant en outre le cas où l'énergie n'est pas libérée instantanément.

Dans le cas de l'implosion, il serait également intéressant d'étudier le comportement d'une bulle soumise à une certaine asymétrie. En effet, on voit, par exemple avec Philipp & Lauterborn [18] que la proximité d'une paroi influence la symétrie d'une bulle de cavitation qui se déforme complètement et prend une forme toroïdale, tout en émettant un jet de vapeur de très haute pression (cf. fig. 4.7), ce qui endommage la paroi (cf. fig. 4.8).

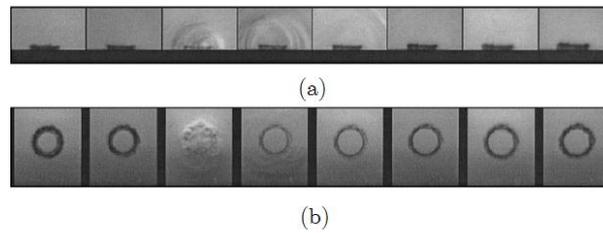


FIG. 4.7 – Première implosion d’une bulle de cavitation, pour $R_{max} = 1,45\text{mm}$, $s/R_{max} = 0,5$, où s est la distance du centre de la bulle à la paroi au moment de sa formation. 10^6 images/s. (a) : vue de profil ; (b) : vue de face. Source : [18].

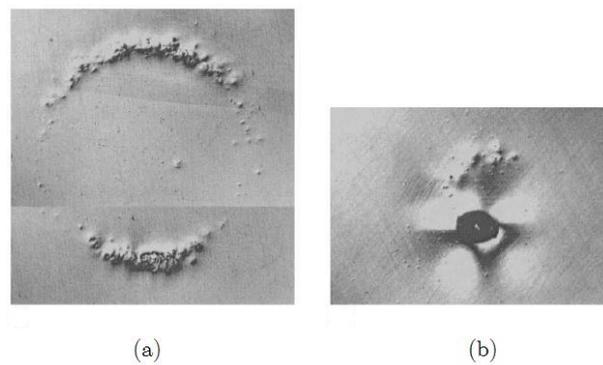


FIG. 4.8 – Érosion d’une plaque de métal par 100 bulles de cavitations. $R_{max} = 1,45\text{mm}$; cadre de $2,6\text{mm}$ de largeur, pour $s/R_{max} = 1,52$ (a) et $s/R_{max} = 1,41$ (b), où s est la distance du centre de la bulle à la paroi au moment de sa formation. Source : [18].

Annexe A

Propriétés du système des équations d'Euler compressibles.

A.1 Hyperbolicité.

Les équations d'Euler (2.2) pour un gaz de Van der Waals de covolume θ , avec c_p et c_v constants, et pour des solutions à symétrie plane, cylindrique ou sphérique s'écrivent, pour les solutions régulières :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ c^2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\gamma\rho}(1-2\theta\rho) & u & \frac{1-\theta\rho}{\gamma} \\ 0 & \frac{c^2}{1-\theta\rho}(\gamma-1+2\theta\rho) & u \end{pmatrix}}_{=:A} \partial_r \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{j\rho u}{r} \\ 0 \\ -\frac{juc^2}{r(1-\theta\rho)}(\gamma-1+2\theta\rho) \end{pmatrix}$$

Ces équations sont *hyperboliques* si les valeurs propres de la matrice A sont réelles et si A est diagonalisable. On cherche donc les valeurs propres de A . Soit $(x_1, x_2, x_3) \neq 0$ le vecteur propre associé à une valeur propre λ . On a :

$$\begin{cases} (u-\lambda)x_1 + \rho x_2 = 0 \\ \frac{c^2}{\gamma\rho}(1-2\theta\rho)x_1 + (u-\lambda)x_2 + \frac{1-\theta\rho}{\gamma}x_3 = 0 \\ \frac{c^2}{1-\theta\rho}(\gamma-1+2\theta\rho)x_2 + (u-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Donc $x_2 = \frac{-1}{\rho}(u-\lambda)x_1$ et :

$$\begin{cases} \left[\frac{c^2}{\gamma\rho}(1-2\theta\rho) - \frac{1}{\rho}(u-\lambda)^2 \right] x_1 + \frac{1-\theta\rho}{\gamma}x_3 = 0 \\ -\frac{c^2}{\rho(1-\theta\rho)}(\gamma-1+2\theta\rho)(u-\lambda)x_1 + (u-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda = u$, la seconde équation du système ci-dessus est vérifiée, et on a : $x_3 = -\frac{c^2(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)}x_1$.

Si $\lambda \neq u$, la seconde équation du système ci-dessus donne : $x_3 = \frac{c^2}{\rho(1-\theta\rho)}(\gamma-1+2\theta\rho)x_1$; (x_1, x_2, x_3) est alors non nul ssi la première équation est vérifiée, ce qui impose : $(u-\lambda)^2 = c^2$ i.e. $\lambda = u \pm c$.

Ainsi, sous les hypothèses énoncées en début de paragraphe, on a le résultat suivant :

Proposition A.1.1 (Hyperbolicité.) *Le système (2.2) est hyperbolique, et même strictement hyperbolique (si $c \neq 0$), c'est à dire qu'il admet trois valeurs propres distinctes $\lambda_1 = u - c$, $\lambda_2 = u$ et $\lambda_3 = u + c$.*

A.2 Courbes caractéristiques.

Le système étant hyperbolique, on sait qu'il admet des courbes dites *caractéristiques* ayant des propriétés intéressantes. On s'attache donc à leur étude, en reprenant ici l'exposé fait dans le livre de Whitham [27], §§ 5.1 & 6.7. On rappelle tout d'abord la définition d'une *courbe caractéristique*.

Définition A.2.1 (i-courbe caractéristique) *On appelle i-courbe caractéristique une courbe paramétrée par $t : (t \rightarrow \chi_i(t))$ telle que :*

$$\frac{d\chi_i}{dt} = \lambda_i(U(\chi_i(t), t)),$$

où $[(x, t) \mapsto U(x, t) = (\rho(x, t), u(x, t), p(x, t))]$ est solution de (2.2).

Comme on l'a déjà noté, l'équation (2.3) montre que s est constant le long des 2-caractéristiques, ce qui implique, par définition de $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$:

$$\frac{d(p(t, \chi_2(t)))}{dt} - c^2 \frac{d\rho(t, \chi_2(t))}{dt} = 0$$

La recherche plus systématique d'équations sur les courbes caractéristiques revient à chercher un triplet $(l_1, l_2, l_3) \neq (0, 0, 0)$ tel que :

$$l_1(\partial_t \rho + u \partial_r \rho + \frac{j\rho u}{r} + \rho \partial_r u) + l_2(\partial_t u + u \partial_r u + \frac{1}{\rho} \partial_r p) + l_3(\partial_t p + u \partial_r p - c^2(\partial_t \rho + u \partial_r \rho)) = 0,$$

et on voudrait trouver dans cette équation un opérateur différentiel commun aux différentes variables.

Supposons $l_3 = 0$, il faut alors $l_2 = 0$ pour que la dérivée spatiale de p n'apparaisse pas, ce qui est nécessaire puisque sa dérivée temporelle disparaît avec la troisième équation. Il ne reste alors que la première équation. Mais la première équation n'est pas sous forme caractéristique : il n'y a pas d'opérateur différentiel commun pour ρ et u . Donc $l_3 \neq 0$, et on peut même imposer : $l_3 = 1$. On a alors :

$$(l_1 - c^2)\partial_t \rho + u(l_1 - c^2)\partial_r \rho + l_2 \partial_t u + (l_1 \rho + l_2 u)\partial_r u + \partial_t p + \left(\frac{l_2}{\rho} + u\right)\partial_r p + l_1 \frac{j\rho u}{r} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Si $l_1 \neq c^2$, alors $l_1 = l_2 = 0$ et on retrouve que la troisième équation du système (2.2) est caractéristique.

Sinon, $l_1 = c^2$ et l'équation (A.1) est caractéristique ssi $l_2^2 = \rho^2 c^2 \Leftrightarrow l_2 = \pm \rho c$. Ainsi, on a :

Proposition A.2.1 (Équations caractéristiques.) *Les équations caractéristiques associées au système (2.2), sous les hypothèses énoncées en début de section, s'écrivent :*

$$\frac{dp}{dt} \pm \rho c \frac{du}{dt} + \frac{j\rho u c^2}{r} = 0 \quad \text{sur} \quad \frac{d\chi_i}{dt} = u \pm c, \quad (\text{A.2})$$

où $i = 1$ –respectivement 3–, si on prend le signe négatif –respectivement positif– dans les équations.

On cherche désormais des fonctions constantes le long des caractéristiques. On introduit donc les notions d'*invariant de Riemann faible* et d'*invariant de Riemann fort*, qui sont des outils usuels pour l'étude des systèmes hyperboliques correspondant à cette idée d'intégrer les courbes caractéristiques.

A.3 Invariants de Riemann.

Définition A.3.1 (Invariant de Riemann faible.) Soient $U = (\rho, u, c^2)$, solution du système $\partial_t U + A(U)\partial_r U = 0$, $r_j(U)$ le vecteur propre associé à $\lambda_j(U)$. On appelle j-invariant de Riemann faible une application z telle que : $dz(U) \cdot r_j(U) \equiv 0$, ce qui revient à dire que z est constant le long des courbes intégrales de r_j , i.e. z est une intégrale première de $U' = r_j(U)$

Définition A.3.2 (Invariant de Riemann fort.) Un i-invariant de Riemann fort est une application w telle que $dw(U)$ est vecteur propre à gauche de $A(U)$, i.e. $dw(U)A(U) = \lambda_i(U)dw(U)$.

Pour un système strictement hyperbolique, si w est un i-invariant de Riemann fort, alors w est un j-invariant de Riemann faible, $\forall j \neq i$; de plus w est constant le long des i-caractéristiques ($j \neq i$).

Ici, il n'y a qu'un seul invariant de Riemann fort qui correspond à la conservation de l'entropie.

Pour être plus précis, on peut donner les vecteurs propres à droite (r_i) et à gauche (l_i) de la matrice A . On obtient :

$$\begin{aligned} r_1 &= (\rho(1 - \theta\rho), -c(1 - \theta\rho), c^2(\gamma - 1 + 2\theta\rho))^t, & l_1 &= (-c^2(1 - 2\theta\rho), \gamma\rho c, -\rho(1 - \theta\rho)), \\ r_2 &= (\rho(1 - \theta\rho), 0, -c^2(1 - 2\theta\rho))^t, & l_2 &= (-c^2(\gamma - 1 + 2\theta\rho), 0, -\rho(1 - \theta\rho)), \\ r_3 &= (\rho(1 - \theta\rho), c(1 - \theta\rho), c^2(\gamma - 1 + 2\theta\rho))^t, & l_3 &= (c^2(1 - 2\theta\rho), \gamma\rho c, \rho(1 - \theta\rho)). \end{aligned}$$

Pour trouver des invariants de Riemann forts, on multiplie les vecteurs propres à gauche l_i par une fonction f_i , de façon à ce que la forme différentielle $f_i l_i$ soit exacte. Sinon, on ne peut pas obtenir d'invariants de Riemann forts. Pour $i = 1$ ou 3 , on trouve nécessairement : $f_i = 0$, il n'y a donc pas d'invariants de Riemann forts dans ces cas. Quant à la fonction f_2 , elle doit vérifier l'équation :

$$\gamma f_2 + (\gamma - 1 + 2\theta\rho)c^2 \frac{\partial f_2}{\partial(c^2)} + \rho(1 - \theta\rho) \frac{\partial f_2}{\partial\rho} = 0,$$

et la seule solution de cette équation hyperbolique correspond à l'invariant de Riemann fort associé à la conservation de l'entropie.

Remarque : On calcule des invariants de Riemann forts dans le cas isentropique : si on est dans une zone isentropique, on sait qu'il existe une constante K telle que $p = K \left(\frac{\rho}{1 - \theta\rho}\right)^\gamma$ et $c^2 = p'(\rho) = \gamma K \frac{\rho^{\gamma-1}}{(1 - \theta\rho)^{\gamma+1}}$. On peut alors réécrire les deux dernières équations caractéristiques (A.2) sous la forme :

$$\frac{c}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \pm \frac{du}{dt} + \frac{juc}{r} = 0 \quad \text{sur} \quad \frac{d\chi_i}{dt} = u \pm c.$$

Dans le cas d'une onde plane, on a $j = 0$ et les équations (A.2) deviennent :

$$\sqrt{\gamma K \frac{\rho^{\gamma-3}}{(1 - \theta\rho)^{\gamma+1}}} \frac{d\rho}{dt} \pm \frac{du}{dt} = 0.$$

D'où $u \pm g(\rho) = cste$ avec g une primitive de $\left(\rho \mapsto \sqrt{\gamma K \frac{\rho^{\gamma-3}}{(1-\theta\rho)^{\gamma+1}}} \right)$.

Ceci signifie que $u \pm g(\rho)$ sont des invariants de Riemann forts pour les équations d'Euler isentropiques.

Lorsque $\theta = 0$, cette primitive est explicite, on trouve en effet : $g(\rho) = \frac{2c}{\gamma - 1}$.

A.4 Problème du piston

Le problème du piston, quoiqu'assez différent de celui qui nous occupe, montre néanmoins comment les courbes caractéristiques peuvent servir (cf. Whitham [27], § 6.8).

On considère un tube contenant un gaz et un piston. On est donc dans le cas d'ondes planes ($j = 0$) et on tire sur le piston de façon régulière, de sorte qu'aucun choc n'apparaisse. On voudrait alors décrire l'aspect du fluide ainsi mis en mouvement. On suppose de plus que le gaz est au repos lorsqu'on commence à tirer sur le piston : à $t = 0$ on a $u = 0$, $c = c_0$, $s = s_0$.

On connaît les courbes caractéristiques déjà obtenues au paragraphe A.2 et s est donc constant le long des 2-caractéristiques, de vitesse u . Celles-ci croisent toutes l'axe $t = 0$ dans le plan (r, t) puisque le mouvement des particules est semblable à celui du piston. Par conséquent les particules se déplacent à la même vitesse u que le piston. Ainsi, s est partout égal à s_0 , le gaz étant isentropique à $t = 0$; le gaz est donc isentropique pour tout temps.

Pour les deux autres caractéristiques, l'une est de vitesse supérieure à u , et l'autre est de vitesse inférieure. La 1-caractéristique, de vitesse inférieure à u , croise donc nécessairement l'axe $t = 0$ et la courbe décrivant le mouvement du piston, ce qui permet d'obtenir, en tout point de la courbe décrivant le piston, une relation du type : $f(c) - u = f(c_0)$. Il reste alors la 3-caractéristique qui donne, combinée avec la relation précédente, $u = cste$ sur chaque courbe, qui est par conséquent une droite (voir fig. A.1).

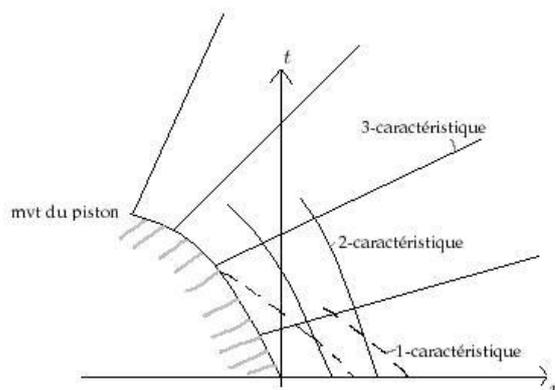


FIG. A.1 – Courbes caractéristiques pour le problème du piston.

Annexe B

Calcul des invariants par les groupes de Lie.

B.1 Éléments théoriques.

48 B.1.1 Quelques définitions.

On donne d'abord quelques définitions concernant les groupes de Lie, qui seront utilisés ultérieurement pour trouver les groupes de symétrie d'un système d'équations différentielles.

On introduit notamment les notions de *générateur f d'un groupe de Lie $G^1(f)$* et de *champ de vecteurs tangent au groupe de Lie $G^1(f)$* .

Définition B.1.1 (Groupe de Lie de transformations.) On appelle groupe de Lie de transformations à un paramètre sur l'espace de Banach X la famille de transformations locales à un paramètre $G^1(f) = f(I)$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , lorsque $f : V \times I \rightarrow X$ (avec $V \subset X$) vérifie les conditions :

1. $\forall x \in V, f(x, 0) = x$;
2. $\forall a, b \in I$ tels que $a + b \in I, \forall x \in V, f(f(x, a), b) = f(x, a + b)$;
3. si $a \in I$ et $\forall x \in V, f(x, a) = x$, alors $a = 0$;
4. $f \in C^\infty(V \times I; X)$.

On dit alors que la transformation f génère le groupe de Lie $G^1(f)$.

Remarque : On note parfois : $f_x(a) = f(x, a)$ pour $x \in V$ et $a \in I$.

Définition B.1.2 (Champ de vecteurs tangent au groupe $G^1(f)$.) Soit X un espace de Banach, $V \subset X$. On appelle champ de vecteurs tangent au groupe $G^1(f)$ le champ de vecteurs $\zeta : V \rightarrow X$ qui vérifie, pour $x \in V$:

$$\zeta(x) = \partial_a f(x, 0),$$

et qui est un vecteurs tangent à l'orbite $f_x(I)$ au point x .

D'après la définition de ζ , en différentiant par rapport à b la relation $f(f(x, a), b) = f(x, a + b)$, on obtient la relation :

$$\partial_a f(x, a) = \zeta \circ f(x, a).$$

Associée à $f(x, 0) = x$, cette relation montre que f_x est solution d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire :

$$\begin{aligned} \partial_a y &= \zeta(y) \\ y(0) &= x \end{aligned} \tag{B.1}$$

où $y : \mathbb{R} \rightarrow X$.

L'équation (B.1) est alors appelée *équation de Lie*.

On se pose alors la question de savoir si les solutions d'un tel problème donnent bien des transformations générant des groupes de Lie. On dispose pour cela d'un premier théorème, donné dans l'ouvrage d'Ovsiannikov [17].

Théorème B.1.1 Soit X un espace de Banach, $V \subset X$. Soit $\zeta : V \rightarrow X$ un champ de vecteurs de classe C^∞ sur V avec $\zeta(x_0) \neq 0$, pour un $x_0 \in V$ donné.

Si f est solution de (B.1), avec comme condition initiale x_0 , alors f génère un groupe de Lie pour lequel le champ de vecteurs tangent est ζ .

On sait donc qu'un champ de vecteurs permet de générer un groupe de Lie. On aimerait alors savoir si il y a une bijection entre champs de vecteurs et groupe de Lie. Le théorème répondant à cette question est également exposé dans le livre d'Ovsiannikov [17].

Théorème B.1.2 Soit X un espace de Banach, $V \subset X$. Un champ de vecteurs $\zeta : V \rightarrow X$ étant donné à un coefficient réel multiplicatif près, il y a bijection entre champs de vecteurs et groupes de Lie.

On peut alors noter, de manière un peu abusive : $G^1(f) = G^1(\zeta)$, et on parle aussi de générateur de groupe de Lie en parlant de ζ .

On voudrait désormais relier les groupe de Lie de transformations à un paramètre aux transformations laissant invariantes des variétés.

Définition B.1.3 Soient X, Y des espaces de Banach. On considère la carte $F : X \rightarrow Y$. Soit $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$, le générateur du groupe de Lie G^1 .

On dit que F est un invariant du groupe de Lie G^1 , si $\forall(x, a) \in X \times \mathbb{R}$ on a la relation :

$$F(f(x, a)) = F(x)$$

B.1.2 Théorie de la continuation.

Définition B.1.4 (Continuation k^e d'espaces et de fonctions.) Soient X, Y des espaces de Banach, k un entier positif. On note Y_k l'espace des formes $\phi : X^k \rightarrow Y$ k -linéaires sur X et symétriques. On introduit l'espace :

$$Z_k = X \times Y \times Y_1 \times \dots \times Y_k,$$

appelé continuation k^e de l'espace $Z = X \times Y$.

La continuation k^e d'une fonction $u : X \rightarrow Y$, de classe C^∞ , est le vecteur :

$$u(x)_k = (x, u(x), \partial_x u(x), \dots, \partial_x^k u(x)) \in Z_k.$$

La continuation k^e permet donc de considérer en même temps une fonction et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre k .

On introduit de même un opérateur de différentiation ∂ sur Z_k .

Définition B.1.5 (Continuation k^e des opérateurs différentiels.) On introduit l'opérateur différentiel ∂ sur Z_k tel que :

$$\partial = (\partial_x, \partial, \partial_1, \dots, \partial_k),$$

où $\partial = \partial$.

L'opérateur D_k :

$$D_k = \partial_x + y \cdot \partial + \dots + \frac{y}{k+1} \cdot \partial_k,$$

est alors appelé opérateur de différentiation exacte, tronqué à l'ordre k . Il coïncide en fait avec l'opérateur de différentiation exacte D (qui correspond à une somme infinie) pour des fonctions F à source dans Z_k .

On peut alors définir la *continuation* k^e du groupe de Lie $G^1(f)$ par :

$${}^1_k G(f) = G^1(h_k).$$

Si $\zeta = (\xi, \eta) \in Z = X \times Y$ est le champ de vecteurs tangent d'un groupe $G^1(f)$, on peut aussi définir la *continuation de l'opérateur* $\zeta \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y$ par :

$$\zeta \cdot \partial = \xi \cdot \partial_x + \eta \cdot \partial_y + \eta \cdot \partial_1 + \dots + \eta \cdot \partial_k,$$

et on peut montrer (cf. Ovsianikov [17], chap.I) que cet opérateur concorde avec le champ de vecteur tangent du groupe ${}^1_k G(f)$

B.1.3 Groupes d'invariance d'équations différentielles.

On écrit un système d'équations différentielles E et on l'interprète comme une variété, dans un certain espace, dont on veut trouver les groupes d'invariances. Pour utiliser les résultats concernant les groupes de Lie, on doit d'abord se ramener à un système linéaire. On utilise pour cela la théorie de la continuation. Ainsi, si E est un système d'ordre k , de m fonctions inconnues $y = (y_1, \dots, y_m)$, dépendant de n variables indépendantes $x = (x_1, \dots, x_n)$, on pose :

$$z = (x, y) \in Z = X \times Y = \mathbb{R}^{n+m},$$

et on peut alors écrire E sous la forme :

$$F(z) = 0$$

où $F : Z_k \rightarrow \mathbb{R}^s$.

On peut alors chercher les continuations k^e des opérateurs $\zeta \cdot \partial$ pour lesquels cette variété est invariante. En tronquant, on retrouvera $\zeta \cdot \partial$.

B.2 Application aux équations d'Euler.

B.2.1 Opérateur d'invariance.

Pour le problème qui nous intéresse, on a :
 - deux variables (indépendantes) : r et t ,

- trois inconnues (variables dépendantes) : u, p et ρ ,
 - des dérivées d'ordres un : $(u_1, u_2, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2)$.
- L'opérateur d'invariance s'écrit alors :

$$\zeta \cdot \partial = \xi \partial_t + \eta \partial_r + \sigma \partial_u + \tau \partial_p + \omega \partial_\rho. \quad (\text{B.2})$$

Le problème consiste à trouver ξ, η, σ, τ et ω tels que $(\zeta \cdot \partial)F(t, r) = 0$, F désignant le système (2.2). Pour cela, on écrit la continuation première de l'opérateur (B.2), ce qui permet de considérer les dérivées premières comme des variables indépendantes. La continuation première suffit ici puisque le système (2.2) est d'ordre un. On appliquera ensuite cet opérateur à chacune des équations du système (2.2).

Tout d'abord, pour simplifier un peu les notations, on introduit l'opérateur D_1 , dans lequel apparaissent les opérateurs de dérivation totale D_1 et D_2 , opérateurs qui jouent un rôle particulièrement important dans la théorie de la continuation :

$$D_1 = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_t \\ \partial_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \partial_u + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \partial_p + \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \partial_\rho$$

D'après Ovsianikov [17] (chapitres I & II), la continuation première de l'opérateur (B.2) s'écrit alors :

$$\zeta \cdot \partial_1 = \xi \partial_t + \eta \partial_r + \sigma \partial_u + \tau \partial_p + \omega \partial_\rho + \sigma_1 \partial_{u_1} + \sigma_2 \partial_{u_2} + \tau_1 \partial_{p_1} + \tau_2 \partial_{p_2} + \omega_1 \partial_{\rho_1} + \omega_2 \partial_{\rho_2}$$

où :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= D_1 \sigma - u_1 D_1 \xi - u_2 D_1 \eta \\ \sigma_2 &= D_2 \sigma - u_1 D_2 \xi - u_2 D_2 \eta \\ \tau_1 &= D_1 \tau - p_1 D_1 \xi - p_2 D_1 \eta \\ \tau_2 &= D_2 \tau - p_1 D_2 \xi - p_2 D_2 \eta \\ \omega_1 &= D_1 \omega - \rho_1 D_1 \xi - \rho_2 D_1 \eta \\ \omega_2 &= D_2 \omega - \rho_1 D_2 \xi - \rho_2 D_2 \eta \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Si on applique $\zeta \cdot \partial_1$ au système (2.2). On obtient :

$$\begin{cases} \omega_1 + u\omega_2 + \rho_2 \sigma + \frac{j\omega u}{1} + \frac{j\rho\sigma}{r} - \frac{j\rho u \eta}{r^2} + \omega u_2 + \rho \sigma_2 = 0 \\ \sigma_1 + u\sigma_2 + \sigma u_2 + \frac{1}{\rho} \tau_2 - \frac{\tau}{\rho^2} p_2 = 0 \\ \tau_1 + u\tau_2 + \sigma p_2 - c^2(\omega_1 + u\omega_2 + \sigma \rho_2) - \gamma \left(\frac{\tau}{\rho(1-\theta\rho)} - \frac{p\omega(1-2\theta\rho)}{\rho^2(1-\theta\rho)^2} \right) (\rho_1 + u\rho_2) = 0 \end{cases}$$

Il reste alors à développer tous les termes. De plus, parmi la première continuation des inconnues, on a trois variables libres : u_2 , p_2 et ρ_2 , et trois variables dépendantes : u_1 , p_1 et ρ_1 . En effet, le système (2.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \rho_1 = -(u\rho_2 + \frac{j\rho u}{1r} + \rho u_2), \\ u_1 = -(uu_2 + \frac{1}{\rho}p_2), \\ p_1 = -(c^2\frac{j\rho u}{r} + c^2\rho u_2 + up_2). \end{cases}$$

On peut ainsi supprimer toutes les occurrences des variables dépendantes dans le développement des équations.

B.2.2 Développement de la première équation.

On obtient, pour la première équation :

$$\begin{aligned} \partial_t \omega & - (uu_2 + \frac{1}{\rho}p_2)\partial_u \omega - (c^2\frac{j\rho u}{r}\partial_u \omega + up_2)\partial_p \omega + (u\rho_2 + \frac{j\rho u}{r}\partial_u \omega + \rho u_2)\partial_\rho \omega + (u\rho_2 + \frac{j\rho u}{r}\partial_u \omega + \rho u_2 + \frac{1}{\rho}p_2)\partial_u \xi \\ & - (c^2\frac{j\rho u}{r} + c^2\rho u_2 + up_2)\partial_p \xi - (u\rho_2 + \frac{j\rho u}{r}\partial_u \omega + \rho u_2)\partial_\rho \xi - \rho_2[\partial_t \eta - (c^2\frac{j\rho u}{r}\partial_u \eta + c^2\rho u_2 + up_2)\partial_p \eta - (u\rho_2 + \frac{j\rho u}{r}\partial_u \omega + \rho u_2)\partial_\rho \eta] \\ & + u(\partial_t \omega + u_2\partial_u \omega + p_2\partial_p \omega) + \sigma\rho_2 + \frac{j\rho u}{r}\partial_u \omega + \omega u_2 + \rho(\partial_t \sigma + u_2\partial_u \sigma + p_2\partial_p \sigma + \rho_2\partial_\rho \sigma) = 0 \end{aligned}$$

54

On regroupe alors les coefficients par rapport aux variables libres. La méthode implique en effet que, ici comme pour un polynôme de degré deux, tous les coefficients s'annulent. On regarde tout d'abord les coefficients des termes quadratiques. Ainsi le coefficient devant p_2^2 donne :

On poursuit de même pour les autres coefficients :

$$\begin{aligned} u_2^2 & : -\rho u \partial_u \xi - \rho^2 \partial_\rho \xi + u \rho \partial_u \xi + \rho u \partial_u \xi - \rho \partial_u \eta = 0 \\ & \iff u \partial_u \xi - \rho \partial_\rho \xi - \partial_u \eta = 0 \\ u_2 \rho_2 & : -u^2 \partial_u \xi - u \rho \partial_\rho \xi - \rho u \partial_\rho \xi + u \partial_u \eta + c^2 \rho \partial_p \eta + \rho \partial_\rho \eta + u^2 \partial_u \xi + u \rho \partial_\rho \xi - u \partial_u \eta + u \rho \partial_\rho \xi - \rho \partial_p \eta = 0 \\ & \iff \partial_p \eta = 0 \\ u_2 p_2 & : -\partial_u \xi + \partial_u \xi = 0 \\ p_2 \rho_2 & : -u \frac{1}{\rho} \partial_u \xi + \frac{1}{\rho} \partial_u \eta + \partial_p \xi = 0 \iff u \partial_u \xi - \rho \partial_\rho \xi - \partial_u \eta = 0 \\ \rho_2^2 & : -u^2 \partial_\rho \xi + u \partial_\rho \eta + u^2 \partial_\rho \xi - u \partial_\rho \eta = 0 \end{aligned}$$

Ainsi on a obtenu : $\partial_p \xi = 0$, $\partial_p \eta = 0$ et $u \partial_u \xi - \rho \partial_\rho \xi - \partial_u \eta = 0$.

De même, on relève les coefficients d'ordre un et d'ordre zéro :

$$\begin{aligned} u_2 : & -u\partial_u\omega - c^2\rho\partial_p\omega - \rho\partial_t\xi - \frac{i\rho u}{r}u\partial_u\xi - \frac{i\rho u}{r}\rho\partial_\rho\xi - \frac{i\rho u}{r}\rho\partial_\rho\xi - \frac{i\rho u}{r}\rho\partial_\rho\xi + \omega + u\partial_u\omega + u\rho\partial_r\xi + \rho\partial_u\sigma + \rho u\partial_r\xi - \rho\partial_r\eta = 0 \\ \iff & -c^2\rho\partial_p\omega - \rho\partial_t\xi - \frac{i\rho u}{r}\rho\partial_\rho\xi + \omega + 2u\rho\partial_r\xi + \rho\partial_u\sigma - \rho\partial_r\eta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2 : & -\frac{1}{\rho}\partial_u\omega - u\partial_p\omega - \frac{i u}{r}\partial_u\xi + u\partial_p\omega + \rho\partial_p\sigma + \partial_r\xi = 0 \\ \iff & -\frac{1}{\rho}\partial_u\omega - \frac{i u}{r}\partial_u\xi + \rho\partial_p\sigma + \partial_r\xi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_2 : & -u\partial_p\omega + u\partial_t\xi - \frac{i\rho u}{r}u\partial_p\xi - \frac{i\rho u}{r}u\partial_p\xi - \partial_t\eta + \frac{i\rho u}{r}\partial_\rho\eta + \sigma + u\partial_p\omega + u^2\partial_t\xi + \frac{i\rho u}{r}u\partial_p\xi - u\partial_r\eta + \rho\partial_p\sigma = 0 \\ \iff & u\partial_t\xi - \frac{i\rho u}{r}u\partial_p\xi - \partial_t\eta + \frac{i\rho u}{r}\partial_\rho\eta + \sigma + u^2\partial_t\xi - u\partial_r\eta + \rho\partial_p\sigma = 0 \end{aligned}$$

$$0 : \partial_t\omega - c^2\frac{i\rho u}{r}\partial_p\omega - \frac{i\rho u}{r}\partial_p\omega + \frac{i\rho u}{r}\partial_t\xi - (\frac{i\rho u}{r})^2\partial_p\xi + \frac{i\rho u}{r} + \frac{i\rho\sigma}{r} - \frac{i\rho u}{r^2}\eta + u\partial_t\omega + \frac{i\rho u}{r}u\partial_r\xi + \rho\partial_r\sigma = 0$$

On procède de même pour les deux autres équations. On obtient finalement le système :

$$\partial_p \xi = \partial_p \xi = \partial_u \xi = 0, \quad \partial_p \eta = \partial_p \eta = \partial_u \eta = 0, \quad \partial_p \tau = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$-c^2 \partial_p \omega - \partial_p \omega + \partial_t \xi + \frac{\omega}{\rho} + 2u \partial_r \xi + \partial_u \sigma - \partial_r \eta = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$-\frac{1}{\rho} \partial_u \omega + \rho \partial_p \sigma + \partial_r \xi = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$u \partial_t \xi - \partial_r \eta + \sigma + u^2 \partial_r \xi - u \partial_r \eta + \rho \partial_p \sigma = 0 \quad (\text{B.7})$$

$$\partial_t \omega - c^2 \frac{j \rho u}{r} \partial_p \omega - \frac{j \rho u}{r} \partial_p \omega + \frac{j \rho u}{r} \partial_t \xi + \frac{j \rho \sigma}{r} + \frac{j \rho u}{r^2} \eta + u \partial_r \omega + \frac{j \rho u}{r} u \partial_r \xi + \rho \partial_r \sigma = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\partial_t \sigma - c^2 \frac{j \rho u}{r} \partial_p \sigma - \frac{j \rho u}{r} \partial_p \sigma + u \partial_r \sigma + \frac{1}{\rho} \partial_r \tau + c^2 \frac{j u}{r} \partial_r \xi = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$-c^2 \rho \partial_p \sigma - \rho \partial_p \sigma + u \partial_t \xi - \partial_r \eta + \sigma + u^2 \partial_r \xi - u \partial_r \eta + \frac{1}{\rho} \partial_u \tau + c^2 \partial_r \xi = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$-\partial_u \sigma + \partial_t \xi - \frac{\omega}{\rho} + 2u \partial_r \xi + \partial_p \tau - \partial_r \eta = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$\partial_t \tau - c^2 \frac{j \rho u}{r} \partial_p \tau + u \partial_r \tau - c^2 u \partial_r \omega - c^2 \partial_t \omega + c^4 \frac{j \rho u}{r} \partial_p \omega + c^2 \frac{j \rho u}{r} \partial_p \omega + \frac{j \rho u}{r} \Gamma \left(\frac{\tau}{\rho(1-\theta\rho)} - \frac{p\omega(1-2\theta\rho)}{\rho^2(1-\theta\rho)^2} \right) = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$-c^2 \rho \partial_p \tau + c^4 \rho \partial_p \omega + c^2 \rho \partial_p \omega + \rho \Gamma \left(\frac{\tau}{\rho(1-\theta\rho)} - \frac{p\omega(1-2\theta\rho)}{\rho^2(1-\theta\rho)^2} \right) = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$-\frac{1}{\rho} \partial_u \tau + u \partial_t \xi - \partial_r \eta + \sigma + u^2 \partial_r \xi - u \partial_r \eta + c^2 \frac{1}{\rho} \partial_u \omega = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$-\sigma - u^2 \partial_r \xi + u \partial_r \eta - u \partial_t \xi + \partial_r \eta = 0 \quad (\text{B.15})$$

On remplace (B.7) par (B.7)+(B.15), (B.14) par (B.14)+(B.15), (B.12) par (B.12)- $\frac{j u}{r}$ (B.13), (B.5) par (B.5)+(B.11), et (B.10) par (B.10)+(B.15)+ c^2 (B.6). On obtient alors :

$$(B.7) \iff \partial_p \sigma = 0$$

$$(B.14) \iff -\partial_u \tau + c^2 \partial_u \omega = 0$$

$$(B.12) \iff \partial_t \tau + u \partial_r \tau - c^2 u \partial_r \omega - c^2 \partial_t \omega = 0$$

$$(B.5) \iff -c^2 \partial_p \omega - \partial_p \omega + 2 \partial_t \xi + 4u \partial_r \xi - 2 \partial_r \eta + \partial_p \tau = 0$$

$$(B.10) \iff \partial_r \xi = 0$$

Le système est donc devenu :

$$\begin{aligned}
\partial_r \xi = \partial_p \xi = \partial_\rho \xi = \partial_u \xi = 0, \quad \partial_p \eta = \partial_\rho \eta = \partial_u \eta = 0, \quad \partial_p \tau = 0, \quad \partial_\rho \sigma = 0 \\
\partial_u \tau - c^2 \partial_u \omega = 0 \\
\partial_t \tau + u \partial_r \tau - c^2 [\partial_t \omega + u \partial_r \omega] = 0 \\
-c^2 \partial_p \omega - \partial_\rho \omega + 2 \partial_t \xi - 2 \partial_r \eta + \partial_p \tau = 0 \\
\partial_u \omega - \rho^2 \partial_p \sigma = 0 \\
\partial_p \tau - \partial_u \sigma + \partial_t \xi - \partial_r \eta = \frac{\omega}{\rho} \\
\partial_t \eta + u \partial_r \eta - u \partial_t \xi = \sigma \\
c^2 \partial_p \omega + \partial_\rho \omega - \partial_p \tau + \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \right) = 0 \\
\partial_t \sigma + u \partial_r \sigma - c^2 \frac{j\rho u}{\tau} \partial_p \sigma + \frac{1}{\rho} \partial_r \tau = 0 \\
\partial_t \omega + u \partial_r \omega + \rho \partial_r \sigma - c^2 \frac{j\rho u}{\tau} \partial_p \omega - \frac{j\rho u}{\tau} \partial_\rho \omega + \frac{j\rho u}{\tau} \partial_t \xi + \frac{j\omega u}{\tau} + \frac{j\rho \sigma}{\tau} - \frac{j\rho u}{\tau^2} \eta = 0
\end{aligned}$$

57

B.2.3 Résolution du système

Quelques manipulations sur la 4^e, la 7^e et la 8^e équation du système précédent, donnent :

$$\begin{aligned}
\partial_r \eta - \partial_t \xi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \right) \\
\partial_t \eta &= \sigma - \frac{u}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \right)
\end{aligned}$$

Si on dérive alors ces deux équations par rapport à u , p et ρ , on obtient que le membre de gauche est nul, et donc :

$$\begin{aligned}\partial_u \tau &= \partial_u \omega \frac{p(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \\ \partial_p \tau - \frac{\tau}{p} &= \partial_p \omega \frac{p(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \\ \partial_\rho \tau (= 0) &= \partial_\rho \omega \frac{p(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} - \omega \frac{(1-2\theta\rho)^2 + 2\theta\rho(1-\theta\rho)}{\rho^2(1-\theta\rho)^2}\end{aligned}$$

et alors

$$\begin{aligned}\partial_u \sigma &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \right) \\ \partial_p \sigma &= 0\end{aligned}$$

Le système d'équation devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_r \xi = \partial_u \xi = \partial_p \xi = \partial_\rho \xi = 0 \\ \partial_u \eta = \partial_p \eta = \partial_\rho \eta = 0 \\ \partial_\rho \tau = \partial_u \tau = 0 \\ \partial_\rho \sigma = 0 \\ \partial_u \omega = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \eta = \sigma - \frac{u}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \right) \\ \partial_r \eta - \partial_t \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \right) \\ \partial_p \omega - \frac{\theta\rho}{p(1-2\theta\rho)} \omega = 0 \\ \partial_\rho \omega - \omega \frac{(1-2\theta\rho + 2\theta^2\rho^2)}{\rho(1-2\theta\rho)(1-\theta\rho)} = 0 \\ c^2 \partial_p \omega + \partial_\rho \omega = \partial_p \omega \frac{p(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} + \omega \frac{(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau + u \partial_r \tau = c^2 (\partial_t \omega + u \partial_r \omega) \\ \partial_t \sigma + u \partial_r \sigma + \frac{1}{\rho} \partial_r \tau = 0 \\ \partial_p \tau - \frac{\tau}{p} = \partial_p \omega \frac{p(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \\ \partial_u \sigma = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{p} - \frac{\omega(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \right) \end{array} \right.$$

$$\text{et } \partial_t \omega + u \partial_r \omega + \rho \partial_r \sigma - \frac{i\rho u}{r} (c^2 \partial_p \omega + \partial_\rho \omega) + \frac{i\rho u}{r} \partial_t \xi + \frac{i\rho \sigma}{r} + \frac{i\rho u}{r^2} \eta = 0$$

En particulier, les trois équations de l'accolade du milieu, en ω , donnent :

$$\begin{aligned} (c^2 - \frac{p(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)}) \frac{\theta\rho}{p(1-2\theta\rho)} \omega + \omega \frac{(1-2\theta\rho + 2\theta^2\rho^2)}{\rho(1-2\theta\rho)(1-\theta\rho)} &= \omega \frac{(1-2\theta\rho)}{\rho(1-\theta\rho)} \\ \iff (\Gamma - (1-2\theta\rho)) \theta \rho \omega &= [(1-2\theta\rho)^2 - (1-2\theta\rho - 2\theta^2\rho^2)] \omega \\ &= 2\theta\rho(-1 + \theta\rho) \omega \end{aligned}$$

Donc : $\theta \neq 0 \implies \omega = 0$

Cas $\theta \neq 0$

Avec $\omega = 0$, le système se réduit à :

$$\begin{cases} \partial_t \tau + u \partial_r \tau = 0 \\ \partial_t \sigma + u \partial_r \sigma + \frac{1}{\rho} \partial_r \tau = 0 \\ \partial_p \tau = \frac{\tau}{p} \\ \partial_u \sigma = \frac{\tau}{2p} \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t \eta = \sigma - \frac{u\sigma}{2p} \\ \partial_r \eta - \partial_t \xi = \frac{\tau}{2p} \\ \rho \partial_r \sigma + \frac{i\rho u}{r} \partial_t \xi + \frac{i\rho\sigma}{r} - \frac{i\rho u}{r^2} \eta = 0 \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport à u , il vient : $\partial_r \tau = 0$, d'où $\partial_t \tau = 0$ et finalement τ ne dépend que de p . Or $\partial_p \tau = \frac{\tau}{p}$. Il existe donc une constante réelle a telle que $\tau = a \cdot p$.

De, même en dérivant la deuxième équation par rapport à u , il vient : $\partial_r \sigma = \partial_t \sigma = 0$. Alors, σ ne dépend que de u et $\partial_u \sigma = \frac{\tau}{2p} = \frac{a}{2}$ donne $\sigma = au/2 + b$, où b est une constante.

Il reste alors à déterminer η et ξ . Les équations restantes permettent de trouver, si $j \neq 0$: $b = 0$, $\eta = c \cdot r$ et $\xi = (c - a/2)t + d$; tandis que $j = 0$ entraîne : $\eta = bt + \tilde{c}r + \tilde{d}$, $\xi = (\tilde{c} - a/2)t + \tilde{e}$.

Cas $\theta = 0$

On obtient notamment : $\partial_p \omega = 0$ et $\partial_\rho \omega = \omega/\rho$.

On dérive l'équation $\rho(\partial_t \sigma + u \partial_r \sigma) + \partial_r \tau = 0$ par rapport à τ . Cela donne : $\partial_r \tau = 0$.

D'autre part, si on dérive $\partial_t \tau = c^2(\partial_t \omega + u \partial_r \omega)$ par rapport à u , on obtient aussi : $\partial_r \omega = 0$.

Cela implique : $\partial_r \sigma = 0$, donc $\partial_t \sigma = 0$ itou, alors $\partial_t \tau = 0$ et $\partial_t \omega = 0$.

Finalement ω ne dépend que de ρ et la forme de $\partial_\rho \omega$ implique : $\omega = A\rho$.

De même on obtient : $\tau = Bp$.

Et $\partial_u \sigma = 1/2(B - A)$ entraîne $\sigma = u/2(B - A) + C$. Il reste encore à déterminer η et ξ . Les dernières équations permettent d'obtenir, si $j \neq 0$: $C = 0$, $\eta = Dr$ et $\xi = (D - (B - A)/2)t + E$; tandis que $j = 0$ implique $\eta = Ct + Fr + G$ et $\xi = (F - (B - A)/2)t + H$. On a donc bien obtenu :

$$\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{l} \xi = (c - a/2)t + d \\ \eta = c \cdot r \\ \sigma = au/2 \\ \tau = a \cdot p \\ \omega = 0 \end{array} \right. ; \\
\text{si } \theta \neq 0 \text{ et } j \neq 0 :
\end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = (\tilde{c} - a/2)t + \tilde{d} \\ \eta = bt + \tilde{c}r + \tilde{d} \\ \sigma = au/2 + b \\ \tau = ap \\ \omega = 0 \end{array} \right. ; \text{ si } \theta \neq 0 \text{ et } j = 0 :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = (D - (B - A)/2)t + E \\ \eta = Dr \\ \sigma = u/2(B - A) \\ \tau = Bp \\ \omega = Ap \end{array} \right. ; \text{ si } \theta = 0 \text{ et } j \neq 0 :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = (F - (B - A)/2)t + H \\ \eta = Ct + Fr + G \\ \sigma = u/2(B - A) + C \\ \tau = Bp \\ \omega = Ap \end{array} \right. ; \text{ si } \theta = 0 \text{ et } j = 0 :$$

Annexe C

Rappels de la théorie des équations différentielles ordinaires.

Définition C.0.1 (Autonomie.) Une équation différentielle ordinaire de la forme $\frac{du}{dt} = f(t, u)$, où u est une fonction inconnue de la variable réelle t , à valeurs dans un espace de Banach X , et où f est une fonction donnée sur $I \times U$, ouvert connexe non-vide de $\mathbb{R} \times X$, est dite autonome lorsque f ne dépend pas de t .

Définition C.0.2 (Points fixes.) Les points fixes d'un système non-linéaire, autonome, de la forme $\frac{du}{dt} = f(u)$ —où f est un champ de vecteur de classe C^1 sur un ouvert U d'un espace de Banach X dans X — sont les points v tels que $f(v) = 0$.

En outre, un point fixe v du champ f est dit hyperbolique si le spectre de l'opérateur $Df(v)$ n'intersecte pas l'axe imaginaire.

Pour connaître le portrait de phase au voisinage d'un tel point, on peut alors appliquer le théorème de Hartman-Grobman :

Théorème C.0.1 (Hartman-Grobman.) Si v est un point fixe hyperbolique de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = f(u)$$

avec $f \in C^1(U)$, U étant un ouvert de \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}$), alors il existe un voisinage \mathcal{V} de v dans U , un voisinage \mathcal{O} de 0 dans \mathbb{R}^n et un homéomorphisme h de \mathcal{V} sur \mathcal{O} tel que le flot $\phi_t(w)$ vérifie :

$$h(\phi_t(w)) = e^{tDf(v)}h(w)$$

pour tout $w \in \mathcal{V}$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_t(w)$ soit bien défini.

Ce théorème signifie que l'on peut déformer continûment les orbites au voisinage de v pour obtenir les orbites du système linéarisé.

Références.

- [1] S. Benzoni. *Analyse mathématique et numérique de la dynamique des fluides compressibles*. Notes de cours, 2003.
- [2] S. Benzoni. *Équations différentielles ordinaires*. Notes de cours, 2005.
- [3] R. F. Chisnell. The motion of a shock wave in a channel, with applications to cylindrical and spherical shock waves. *J. Fluid Mech.*, 2 :286–298, 1957.
- [4] R. F. Chisnell. An analytic description of converging shock waves. *J. Fluid Mech.*, 354 :357–375, 1998.
- [5] Fiammetta Conforto. Wave features and group analysis for an axi-symmetric model of a dusty gas. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 35(5) :925–930, 2000.
- [6] Laurent Descamps. Théories et solutions autosemblables de l’explosion ponctuelle anisotrope dans un gaz. *Rapport de thèse de Doctorat en mécanique*, 1999.
- [7] Andrea Donato and Francesco Oliveri. When nonautonomous equations are equivalent to autonomous ones. *Appl. Anal.*, 58(3-4) :313–323, 1995.
- [8] Allan K. Evans. Instability of converging shock waves and sonoluminescence. *Physical Review E*, 54(5) :5004–5011, 1996.
- [9] G. Guderley. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse. *Luftfahrtforschung*, 19 :302–311, 1942.
- [10] S. Hilgenfeldt and D. Lohse. Sonoluminescence et fusion nucléaire. *La Recherche*, 354 :22–28, 2002.
- [11] J. Jena and V. D. Sharma. Self-similar shocks in a dusty gas. *Internat. J. Non-Linear Mech.*, 34(2) :313–327, 1999.
- [12] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of theoretical physics. Vol. 6*. Pergamon Press, Oxford, second edition, 1987. Fluid mechanics, Translated from the third Russian edition by J. B. Sykes and W. H. Reid.
- [13] Tai Ping Liu. Nonlinear stability and instability of transonic flows through a nozzle. *Comm. Math. Phys.*, 83(2) :243–260, 1982.
- [14] Tai Ping Liu. Transonic gas flow in a duct of varying area. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 80(1) :1–18, 1982.
- [15] N. Marinesco and J. J. Trillat. *Proc. R. Acad. Sci.*, 196 :858, 1933.
- [16] F. Moulin. Etude du phénomène de sonoluminescence. <http://www.phytem.ens-cachan.fr>, T. P. de licence n°1.
- [17] L. V. Ovsiannikov. *Group analysis of differential equations*. Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1982. Translated from the Russian by Y. Chapovsky, Translation edited by William F. Ames.

-
- [18] A. Philipp and W. Lauterborn. Cavitation erosion by single laser-produced bubbles. *J. Fluid Mech.*, 361 :75–116, 1998.
- [19] S. J. Putterman. Sonoluminescence - Sound Into Light. *Scientific American*, 272 :46–+, February 1995.
- [20] P. H. Roberts and C. C. Wu. Structure and stability of a spherical shock wave in a van der Waals gas. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 49(4) :501–543, 1996.
- [21] P. H. Roberts and C. C. Wu. The shock-wave theory of sonoluminescence. *Shock Focussing Effect in Medical Science and Sonoluminescence*, Springer, 2003.
- [22] L. Sédov. *Similitude et dimensions en mécanique*. Éditions Mir, Moscow, 1972.
- [23] Denis Serre. *Systèmes de lois de conservation. I. Fondations*. [Foundations]. Diderot Editeur, Paris, 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves].
- [24] R. C. Srivastava, D. Leutloff, K. Takayama, and H. Grönig. *Shock Focussing Effect in Medical Science and Sonoluminescence*. Springer, 2003.
- [25] Helfried Steiner and Thomas Hirschler. A self-similar solution of a shock propagation in a dusty gas. *Eur. J. Mech. B Fluids*, 21(3) :371–380, 2002.
- [26] Walter A. Strauss. *Partial differential equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. An introduction.
- [27] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.