

Stabilité L^1 pour des lois d'équilibre scalaires.
Contrôle de l'équation de continuité.

M. Mercier

ICJ, Lyon

GdR Moad, 18 Mars 2009

Introduction

Lois d'équilibre scalaires :

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{Div} f(t, x, u) = F(t, x, u) & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^N \\ u(0, x) = u_0(x) \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV} & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où $f \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$, $F \in \mathcal{C}^1([0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

- Existence et unicité, dépendance aux conditions initiales : Théorème de Kružkov
- Dépendance par rapport au flux et à la source ?

Equation de continuité :

$$\partial_t u + \operatorname{Div}(uV(u(t))) = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV},$$

où $V : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ est une fonctionnelle non-locale régularisante, par exemple, si $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application régulière :

- $V(u) = v\left(\int_{\mathbb{R}^N} u \, dx\right)$ dans le cas d'une chaîne de montage
- $V(u) = v(\eta *_x u)\vec{v}(x)$, η étant un noyau régularisant, dans le cas du trafic piéton.

But :

- Existence d'une solution entropique ?
- Dérivée de Gâteaux du semi-groupe obtenu ?

Equation de continuité :

$$\partial_t u + \text{Div}(uV(u(t))) = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV},$$

où $V : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ est une fonctionnelle non-locale régularisante, par exemple, si $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application régulière :

- $V(u) = v\left(\int_{\mathbb{R}^N} u \, dx\right)$ dans le cas d'une chaîne de montage
- $V(u) = v(\eta *_x u)\vec{v}(x)$, η étant un noyau régularisant, dans le cas du trafic piéton.

But :

- Existence d'une solution entropique ?
- Dérivée de Gâteaux du semi-groupe obtenu ?

Plan

- 1 Stabilité L^1 par rapport au flux et à la source
 - Résultats existants
 - Estimation de la variation totale
 - Dépendance par rapport au flux et à la source
- 2 Existence de solutions pour f, F non-locales
 - Trafic piéton
 - Dérivée de Gâteaux du semi-groupe

Plan

- 1 Stabilité L^1 par rapport au flux et à la source
 - Résultats existants
 - Estimation de la variation totale
 - Dépendance par rapport au flux et à la source
- 2 Existence de solutions pour f, F non-locales
 - Trafic piéton
 - Dérivée de Gâteaux du semi-groupe

Théorème (Kružkov (1970))

Notons $\Omega_A = [0, T] \times \mathbb{R}^N \times [-A, A]$ pour tout $A \geq 0$. Si

$$\text{(K)} \quad \forall A > 0, \quad \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A), \quad \partial_u(F - \operatorname{div} f) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A) \\ \text{et } F - \operatorname{div} f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A)$$

alors, pour tout $u_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^1)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ tel que $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M_0$, il existe une unique solution entropique $u \in \mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ continue à droite en temps et il existe $M > 0$ tel que $\|u\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M$.

Soit $v_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ tel que $\|v_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M_0$, et alors

$$\|(u - v)(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{\gamma t} \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1},$$

où $\gamma = \|\partial_u(F - \operatorname{div} f)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}$.

Théorème (Kružkov (1970))

Notons $\Omega_A = [0, T] \times \mathbb{R}^N \times [-A, A]$ pour tout $A \geq 0$. Si

$$\text{(K)} \quad \forall A > 0, \quad \partial_u f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A), \quad \partial_u(F - \operatorname{div} f) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A) \\ \text{et } F - \operatorname{div} f \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_A)$$

alors, pour tout $u_0 \in (\mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{L}^1)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ tel que $\|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M_0$, il existe une unique solution entropique $u \in \mathbf{L}^\infty([0, T]; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ continue à droite en temps et il existe $M > 0$ tel que $\|u\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M$.

Soit $v_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ tel que $\|v_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq M_0$, et alors

$$\|(u - v)(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq e^{\gamma t} \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1},$$

où $\gamma = \|\partial_u(F - \operatorname{div} f)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}$.

Précédents Résultats

Lucier (1986) / Bouchut & Perthame (1998) : flux ne dépendant que de u , et pas de source $F = G = 0$,

Théorème

Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont globalement lipschitziennes, alors $\exists C > 0$ tel que $\forall u_0, v_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ conditions initiales pour

$$\partial_t u + \text{Div} f(u) = 0, \quad \partial_t v + \text{Div} g(v) = 0.$$

avec de plus $v_0 \in \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, on a $\forall t \geq 0$,

$$\|(u - v)(t)\|_{\mathbf{L}^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{\mathbf{L}^1} + Ct \text{TV}(v_0) \mathbf{Lip}(f - g).$$

Variation totale

Définition : Pour $u \in \mathbf{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ on pose

$$\text{TV}(u) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{div} \Psi; \quad \Psi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N), \quad \|\Psi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\};$$

et

$$\mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathbf{L}_{loc}^1; \text{TV}(u) < \infty \right\}.$$

Remarque : Lorsque f et F ne dépendent que de u on a

$$u_0 \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV} \Rightarrow \forall t \geq 0, \quad u(t) \in \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV}$$

et de plus, notant $\gamma = \|\partial_u F\|_{L^\infty(\Omega_M)}$,

$$\text{TV}(u(t)) \leq \text{TV}(u_0) e^{\gamma t}.$$

Chen & Karlsen (2005) : flux de la forme $f(t, x, u) = \lambda(x)l(u)$,
 $g(t, x, v) = \mu(x)m(v)$, pas de source $F = G = 0$,

$$\|(u - v)(t)\|_{L^1} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^1} + C_1 t (\|\lambda - \mu\|_{L^\infty} + \|\lambda - \mu\|_{W^{1,1}} + \|l - m\|_{L^\infty} + \|l - m\|_{W^{1,\infty}})$$

où $C_1 = C_{\sup_{[0, \tau]} (\text{TV}(u(t)), \text{TV}(v(t)))}$.

Problème : On ne dispose pas en général d'estimation sur la variation totale !

Plan

- 1 Stabilité L^1 par rapport au flux et à la source
 - Résultats existants
 - Estimation de la variation totale
 - Dépendance par rapport au flux et à la source
- 2 Existence de solutions pour f, F non-locales
 - Trafic piéton
 - Dérivée de Gâteaux du semi-groupe

Estimation de la variation totale (R.M. Colombo, M.M., M.D. Rosini)

Théorème (TV)

Supposons (f, F) vérifient **(K)** + **(H1)**. Soit

$$\kappa_0 = NW_N \left((2N + 1) \|\nabla_x \partial_u f\|_{L^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{L^\infty(\Omega_M)} \right). \text{ Si}$$

$u_0 \in (L^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, alors $\forall t \in [0, T]$, $u(t) \in (L^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \text{TV}(u(t)) \leq & \text{TV}(u_0) e^{\kappa_0 t} \\ & + NW_N \int_0^t e^{\kappa_0(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla_x (F - \text{div} f)(\tau, x, \cdot)\|_{L^\infty(du)} dx d\tau. \end{aligned}$$

(H1) : $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla_x (F - \text{div} f)\|_{L^\infty(du)} dx dt < \infty$ et $\nabla_x \partial_u f \in L^\infty(\Omega_M)$

Remarque : On retrouve des estimations connues dans les cas particuliers

- f, F ne dépendent que de u ,
- f, F ne dépendent pas de u .

Estimation de la variation totale (R.M. Colombo, M.M., M.D. Rosini)

Théorème (TV)

Supposons (f, F) vérifient **(K)** + **(H1)**. Soit

$$\kappa_0 = NW_N \left((2N + 1) \|\nabla_x \partial_u f\|_{L^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{L^\infty(\Omega_M)} \right). \text{ Si}$$

$u_0 \in (L^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, alors $\forall t \in [0, T]$, $u(t) \in (L^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \text{TV}(u(t)) \leq & \text{TV}(u_0) e^{\kappa_0 t} \\ & + NW_N \int_0^t e^{\kappa_0(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla_x (F - \text{div} f)(\tau, x, \cdot)\|_{L^\infty(d\mu)} dx d\tau. \end{aligned}$$

(H1) : $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla_x (F - \text{div} f)\|_{L^\infty(d\mu)} dx dt < \infty$ et $\nabla_x \partial_u f \in L^\infty(\Omega_M)$

Remarque : On retrouve des estimations connues dans les cas particuliers

- f, F ne dépendent que de u ,
- f, F ne dépendent pas de u .

Estimation de la variation totale (R.M. Colombo, M.M., M.D. Rosini)

Théorème (TV)

Supposons (f, F) vérifient **(K)** + **(H1)**. Soit

$$\kappa_0 = NW_N \left((2N + 1) \|\nabla_x \partial_u f\|_{L^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{L^\infty(\Omega_M)} \right). \text{ Si}$$

$u_0 \in (L^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, alors $\forall t \in [0, T]$, $u(t) \in (L^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \text{TV}(u(t)) \leq & \text{TV}(u_0) e^{\kappa_0 t} \\ & + NW_N \int_0^t e^{\kappa_0(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla_x (F - \text{div} f)(\tau, x, \cdot)\|_{L^\infty(d\mu)} dx d\tau. \end{aligned}$$

(H1) : $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla_x (F - \text{div} f)\|_{L^\infty(d\mu)} dx dt < \infty$ et $\nabla_x \partial_u f \in L^\infty(\Omega_M)$

Remarque : On retrouve des estimations connues dans les cas particuliers

- f, F ne dépendent que de u ,
- f, F ne dépendent pas de u .

Idée de preuve :

Proposition

Soit $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ telle que $\|\mu\|_{L^1} = 1$ et $\mu' < 0$ sur \mathbb{R}_+^* . On pose $\mu_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^N} \mu\left(\frac{\|x\|}{\lambda}\right)$. Si il existe $C_0 > 0$ tel que $\forall \lambda > 0$,

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y) - u(x)| \mu_\lambda(y) dx dy \leq C_0,$$

alors $u \in \mathbf{BV}$ et

$$\mathrm{TV}(u) \int_{\mathbb{R}^N} |y_1| \mu(\|y\|) dy \leq C_0.$$

On introduit

$$\mathcal{F}(T, \lambda) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t))} |u(x+y) - u(x)| \mu_\lambda(y) dx dy dt.$$

Idée de preuve :

Proposition

Soit $\mu \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ telle que $\|\mu\|_{L^1} = 1$ et $\mu' < 0$ sur \mathbb{R}_+^* . On pose $\mu_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^N} \mu\left(\frac{\|x\|}{\lambda}\right)$. Si il existe $C_0 > 0$ tel que $\forall \lambda > 0$,

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x+y) - u(x)| \mu_\lambda(y) dx dy \leq C_0,$$

alors $u \in \mathbf{BV}$ et

$$\mathrm{TV}(u) \int_{\mathbb{R}^N} |y_1| \mu(\|y\|) dy \leq C_0.$$

On introduit

$$\mathcal{F}(T, \lambda) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_{B(x_0, R+M(T_0-t))} |u(x+y) - u(x)| \mu_\lambda(y) dx dy dt.$$

La méthode de doublement des variables donne l'estimation :

$$\partial_T \mathcal{F}(T, \lambda) \leq \partial_T \mathcal{F}(0, \lambda) + C\lambda \partial_\lambda \mathcal{F}(T, \lambda) + C' \mathcal{F}(T, \lambda) + \lambda \int_0^T A(t) dt,$$

où $A(t) = \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla(F - \operatorname{div} f)(t, x \cdot)\|_{L^\infty(du)}$.

On intègre en temps et on divise par $CT\lambda$:

$$0 \leq \frac{1}{C\lambda} \mathcal{F}(0, \lambda) + \partial_\lambda \mathcal{F}(T, \lambda) + \frac{\alpha(T)}{\lambda} \mathcal{F}(T, \lambda) + \frac{1}{C} \int_0^T A(t) dt,$$

où $\alpha(T) = N + C'/C - 1/T \rightarrow -\infty$ quand $T \rightarrow 0$. On choisit T assez petit et on intègre sur $[\lambda, +\infty[$. On obtient

$$\mathcal{F}(T, \lambda) \leq \frac{\lambda}{\alpha - 1} K^{\operatorname{TV}}(u_0) + \frac{\lambda}{C(\alpha - 1)} \int_0^T A(t) dt.$$

Plan

- 1 Stabilité L^1 par rapport au flux et à la source
 - Résultats existants
 - Estimation de la variation totale
 - Dépendance par rapport au flux et à la source
- 2 Existence de solutions pour f, F non-locales
 - Trafic piéton
 - Dérivée de Gâteaux du semi-groupe

Dépendance par rapport au flux et à la source

Théorème (Flux/Source)

Supposons que $(f, F), (g, G)$ vérifient **(K)**, (f, F) vérifie **(H1)** et $(f - g, F - G)$ vérifie **(H2)**. Soient $u_0, v_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. On note

$$\kappa = 2N \|\nabla_x \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}.$$

Soient u et v les solutions associées respectivement aux flux et sources (f, F) et (g, G) et aux conditions initiales (u_0, v_0) .

(H2) : $\partial_u(F - G) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$, $\partial_u(f - g) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$ et $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|F - G - \operatorname{div}(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty(\partial_u)} dx dt < \infty$.

Dépendance par rapport au flux et à la source

Théorème (Flux/Source)

Supposons que $(f, F), (g, G)$ vérifient **(K)**, (f, F) vérifie **(H1)** et $(f - g, F - G)$ vérifie **(H2)**. Soient $u_0, v_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. On note

$$\kappa = 2N \|\nabla_x \partial_u f\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u F\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)} + \|\partial_u(F - G)\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_M)}.$$

Soient u et v les solutions associées respectivement aux flux et sources (f, F) et (g, G) et aux conditions initiales (u_0, v_0) .

(H2) : $\partial_u(F - G) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$, $\partial_u(f - g) \in \mathbf{L}^\infty(\Omega_M)$ et $\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \|F - G - \operatorname{div}(f - g)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathrm{d}u)} \mathrm{d}x \mathrm{d}t < \infty$.

Théorème (Flux/Source, suite)

alors $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|(u - v)(t)\|_{L^1} &\leq e^{\kappa t} \|u_0 - v_0\|_{L^1} + \frac{e^{\kappa_0 t} - e^{\kappa t}}{\kappa_0 - \kappa} \text{TV}(u_0) \|\partial_u(f - g)\|_{L^\infty} \\ &+ \int_0^t \frac{e^{\kappa_0(t-\tau)} - e^{\kappa(t-\tau)}}{\kappa_0 - \kappa} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla_x(F - \text{div}f)(\tau, x, \cdot)\|_{L^\infty(du)} dx d\tau \\ &\quad \times \text{NW}_N \|\partial_u(f - g)\|_{L^\infty} \\ &+ \int_0^t e^{\kappa(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \|((F - G) - \text{div}(f - g))(\tau, x, \cdot)\|_{L^\infty(du)} dx d\tau. \end{aligned}$$

Remarque : De même que pour le Théorème (TV), on retrouve des estimations connues pour des cas particuliers

- si f, g ne dépendent que de u , $F = G = 0$,
- si f, g, F, G ne dépendent pas de u .

Théorème (Flux/Source, suite)

alors $\forall t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|(u - v)(t)\|_{L^1} &\leq e^{\kappa t} \|u_0 - v_0\|_{L^1} + \frac{e^{\kappa_0 t} - e^{\kappa t}}{\kappa_0 - \kappa} \text{TV}(u_0) \|\partial_u(f - g)\|_{L^\infty} \\ &+ \int_0^t \frac{e^{\kappa_0(t-\tau)} - e^{\kappa(t-\tau)}}{\kappa_0 - \kappa} \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla_x(F - \text{div}f)(\tau, x, \cdot)\|_{L^\infty(du)} dx d\tau \\ &\quad \times \text{NW}_N \|\partial_u(f - g)\|_{L^\infty} \\ &+ \int_0^t e^{\kappa(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^N} \|((F - G) - \text{div}(f - g))(\tau, x, \cdot)\|_{L^\infty(du)} dx d\tau. \end{aligned}$$

Remarque : De même que pour le Théorème (TV), on retrouve des estimations connues pour des cas particuliers

- si f, g ne dépendent que de u , $F = G = 0$,
- si f, g, F, G ne dépendent pas de u .

Plan

- 1 Stabilité L^1 par rapport au flux et à la source
 - Résultats existants
 - Estimation de la variation totale
 - Dépendance par rapport au flux et à la source
- 2 Existence de solutions pour f, F non-locales
 - Trafic piéton
 - Dérivée de Gâteaux du semi-groupe

Trafic piéton (R.M. Colombo, M. Herty, M.M.)

On considère maintenant des équations du type

$$\partial_t u + \operatorname{Div}(uV(u)) = 0; \quad u_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$$

où $V : \mathbf{L}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2$ est une fonctionnelle non-locale régularisante.

Existence d'une solution

Théorème (Trafic)

Si V satisfait **(V1)**, alors il existe un $T_{\text{ex}} > 0$ et une unique solution entropique $u \in C^0([0, T_{\text{ex}}[; \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV})$ et on note $S_t u_0 = u(t, \cdot)$.
On peut minorer le temps d'existence par

$$T_{\text{ex}} = \sup \left\{ \sum_n \frac{\ln(\alpha_{n+1}/\alpha_n)}{C(\alpha_{n+1})}; (\alpha_n)_n \text{ strict. croissante, } \alpha_0 = \|u_0\|_{\mathbf{L}^\infty} \right\}.$$

Si de plus, V satisfait **(V2)** alors

$$u_0 \in \mathbf{W}^{2,1} \cap \mathbf{L}^\infty \Rightarrow \forall t \in [0, T_{\text{ex}}[, \quad u(t) \in \mathbf{W}^{2,1}.$$

La preuve se base sur un point fixe + lemme de représentation des solutions d'une équation de transport.

Hypothèses

(V1) Il existe $C \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ telle que $\forall u \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} V(u) &\in \mathbf{L}^\infty, & \|\nabla_x V(u)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}), \\ \|\nabla_x V(u)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}), & \|\nabla_x^2 V(u)\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}), \end{aligned}$$

et $\forall u_1, u_2 \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \|V(u_1) - V(u_2)\|_{\mathbf{L}^\infty} &\leq C(\|u_1\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^1}, \\ \|\nabla_x(V(u_1) - V(u_2))\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C(\|u_1\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|u_1 - u_2\|_{\mathbf{L}^1}. \end{aligned}$$

(V2) il existe $C \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ telle que $\|\nabla_x^3 V(u)\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C(\|u\|_{\mathbf{L}^\infty})$.

Idée de preuve :

Soient $\beta > \alpha > 0$ et $T \leq T_* = \frac{\ln(\beta/\alpha)}{C(\beta)}$. On introduit l'espace

$X_\alpha = \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$ et l'application \mathcal{Q} qui associe à

$w \in \mathcal{X}_\beta = \mathcal{C}^0([0, T[, X_\beta)$ associe la solution $u \in \mathcal{X}_\beta$ du problème

$$\partial_t u + \text{Div}(uV(w)) = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0 \in X_\alpha$$

Pour w_1, w_2 , on obtient par l'estimation du Thm (Flux/Source)

$$\|\mathcal{Q}(w_1) - \mathcal{Q}(w_2)\|_{L^\infty([0, T[, L^1)} \leq f(T) \|w_1 - w_2\|_{L^\infty([0, T[, L^1)},$$

où f est croissante, $f(0) = 0$ et $f \rightarrow_{T \rightarrow \infty} \infty$

On applique ensuite le théorème du point fixe.

Idée de preuve :

Soient $\beta > \alpha > 0$ et $T \leq T_* = \frac{\ln(\beta/\alpha)}{C(\beta)}$. On introduit l'espace

$X_\alpha = \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{BV}(\mathbb{R}^N; [0, \alpha])$ et l'application \mathcal{Q} qui associe à $w \in \mathcal{X}_\beta = \mathcal{C}^0([0, T[, X_\beta)$ associe la solution $u \in \mathcal{X}_\beta$ du problème

$$\partial_t u + \text{Div}(uV(w)) = 0, \quad u(0, \cdot) = u_0 \in X_\alpha$$

Pour w_1, w_2 , on obtient par l'estimation du Thm (Flux/Source)

$$\|\mathcal{Q}(w_1) - \mathcal{Q}(w_2)\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T[, \mathbf{L}^1)} \leq f(T) \|w_1 - w_2\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T[, \mathbf{L}^1)},$$

où f est croissante, $f(0) = 0$ et $f \rightarrow_{T \rightarrow \infty} \infty$

On applique ensuite le théorème du point fixe.

Plan

- 1 Stabilité L^1 par rapport au flux et à la source
 - Résultats existants
 - Estimation de la variation totale
 - Dépendance par rapport au flux et à la source
- 2 Existence de solutions pour f, F non-locales
 - Trafic piéton
 - Dérivée de Gâteaux du semi-groupe

Définition : On dit que l'application $S : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ est \mathbf{L}^1 Gâteaux différentiable en $u_0 \in \mathbf{L}^1$ dans la direction $r_0 \in \mathbf{L}^1$ s'il existe une application linéaire continue $DS(u_0) : \mathbf{L}^1 \rightarrow \mathbf{L}^1$ telle que

$$\left\| \frac{S(u_0 + hr_0) - S(u_0)}{h} - DS(u_0)(r_0) \right\|_{\mathbf{L}^1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

On veut montrer que le semi-groupe local donnant la solution de l'équation de trafic piéton est \mathbf{L}^1 Gâteaux différentiable. On s'attend à ce que la dérivée de Gâteaux soit la solution du problème linéarisé :

$$\partial_t r + \text{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0, \quad r(0, \cdot) = r_0.$$

Définition : On dit que l'application $S : \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ est \mathbf{L}^1 Gâteaux différentiable en $u_0 \in \mathbf{L}^1$ dans la direction $r_0 \in \mathbf{L}^1$ s'il existe une application linéaire continue $DS(u_0) : \mathbf{L}^1 \rightarrow \mathbf{L}^1$ telle que

$$\left\| \frac{S(u_0 + hr_0) - S(u_0)}{h} - DS(u_0)(r_0) \right\|_{\mathbf{L}^1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

On veut montrer que le semi-groupe local donnant la solution de l'équation de trafic piéton est \mathbf{L}^1 Gâteaux différentiable. On s'attend à ce que la dérivée de Gâteaux soit la solution du problème linéarisé :

$$\partial_t r + \text{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0, \quad r(0, \cdot) = r_0.$$

On introduit les jeux d'hypothèses :

(V3) $V : \mathbf{L}^1 \rightarrow \mathcal{C}^2$ est Fréchet différentiable et il existe $C \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^\infty$ tel que $\forall u, r \in \mathbf{L}^1$,

$$\begin{aligned} \|V(u+r) - V(u) - DV(u)(r)\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} &\leq C (\|u\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u+r\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|r\|_{\mathbf{L}^1}^2, \\ \|DV(u)(r)\|_{\mathbf{W}^{2,\infty}} &\leq C (\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|r\|_{\mathbf{L}^1}. \end{aligned}$$

(V4) Il existe $C \in \mathbf{L}_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ telle que $\forall u, \tilde{u}, r \in \mathbf{L}^1$

$$\begin{aligned} \left\| \operatorname{div} (V(\tilde{u}) - V(u) - DV(u)(\tilde{u} - u)) \right\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C (\|\tilde{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} + \|u\|_{\mathbf{L}^\infty}) (\|\tilde{u} - u\|_{\mathbf{L}^1})^2 \\ \left\| \operatorname{div} (DV(u)(r)) \right\|_{\mathbf{L}^1} &\leq C (\|u\|_{\mathbf{L}^\infty}) \|r\|_{\mathbf{L}^1}. \end{aligned}$$

Théorème (Gâteaux dérivée faible)

On suppose que V satisfait **(V1)** et **(V3)**. Soit $u_0 \in \mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{1,1}$ et $T_{\text{ex}} > 0$ le temps d'existence de la solution obtenue par le Théorème (Trafic). Alors, $\forall t \in [0, T_{\text{ex}}[, \forall r_0 \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty \cap \mathbf{BV}$ et pour toute suite (h_n) convergant vers 0, il existe une sous-suite à

$$\frac{S_t(u_0 + h_n r_0) - S_t(u_0)}{h_n}$$

qui converge faiblement dans \mathbf{L}^1 vers une solution faible de l'équation linéarisée.

Outils : Théorème de Dunford-Pettis pour $\left(\frac{u_h - u}{h}\right)_h$, borné dans \mathbf{L}^1 , grâce au Thm (Flux/Source) + définition solutions faibles.

Problèmes : 'dérivée de Gâteaux \mathbf{L}^1 faible' ; pas d'unicité de la limite.

On montre que le problème linéarisé admet une unique solution entropique :

Théorème (Linéarisé)

Supposons que V satisfait **(V1)**, **(V2)**, **(V3)**. Soit $u \in \mathcal{C}^0([0, T_{\text{ex}}[; \mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{1,1})$, $r_0 \in (\mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^\infty)(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Alors, le problème linéarisé

$$\partial_t r + \text{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0, \quad \text{avec } r(0, x) = r_0$$

admet une unique solution entropique $r \in \mathcal{C}^0([0, T_{\text{ex}}[; \mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}))$ et on note alors $\Sigma_t^u r_0 = r(t, \cdot)$.

Si de plus $r_0 \in \mathbf{W}^{1,1}$, alors $\forall t \in [0, T_{\text{ex}}[, r(t) \in \mathbf{W}^{1,1}$.

Théorème (Gâteaux Dérivée)

Supposons que V satisfait **(V1)**, **(V2)**, **(V3)**, **(V4)**. Soit $u_0 \in \mathbf{W}^{1,\infty} \cap \mathbf{W}^{2,1}$, $r_0 \in \mathbf{W}^{1,1} \cap \mathbf{L}^\infty$ et soit T_{ex} le temps d'existence pour le problème initial donné par le théorème (Trafic). Alors, pour tout $t \in [0, T_{\text{ex}}[$ le semi-groupe local du problème de trafic piéton est \mathbf{L}^1 Gâteaux différentiable dans la direction r_0 et

$$DS_t(u_0)(r_0) = \sum_t^{S_t u_0} r_0.$$

Idee de preuve : utilisation du Théorème (Flux/Source) pour comparer la solution de condition initiale $u_0 + hr_0$ à la solution $u + hr$.

Soient u, u_h les solutions du problème $\partial_t u + \text{Div}(uV(u)) = 0$ avec conditions initiales $u_0, u_0 + hr_0$. Soit r la solution du problème linéarisé $\partial_t r + \text{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0$, $r(0) = r_0$ et soit $z_h = u + hr$ qui vérifie alors

$$\partial_t z_h + \text{Div}(z_h(V(u) + hDV(u)(r))) = h^2 \text{Div}(rDV(u)(r)), \quad z_h(0) = u_0 + hr_0.$$

On utilise ensuite le Thm (Flux/Source) pour comparer u_h et z_h . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \|u_h - z_h\|_{L^\infty([0, T], L^1)} \leq F(T) & \left(\frac{1}{h} \|u_h - u\|_{L^\infty(L^1)}^2 + \frac{1}{h} \|u_h - z_h\|_{L^\infty(L^1)} \right) \\ & + hC(\beta) Te^{C(\beta)T} \|r\|_{L^\infty(W^{1,1})} \|r\|_{L^\infty(L^1)}, \end{aligned}$$

avec F croissante et $F(0) = 0$.

Soient u, u_h les solutions du problème $\partial_t u + \text{Div}(uV(u)) = 0$ avec conditions initiales $u_0, u_0 + hr_0$. Soit r la solution du problème linéarisé $\partial_t r + \text{Div}(rV(u) + uDV(u)(r)) = 0$, $r(0) = r_0$ et soit $z_h = u + hr$ qui vérifie alors







$$\partial_t z_h + \text{Div}(z_h(V(u) + hDV(u)(r))) = h^2 \text{Div}(rDV(u)(r)), \quad z_h(0) = u_0 + hr_0.$$

On utilise ensuite le Thm (Flux/Source) pour comparer u_h et z_h . On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \|u_h - z_h\|_{L^\infty([0, T], L^1)} &\leq F(T) \left(\frac{1}{h} \|u_h - u\|_{L^\infty(L^1)}^2 + \frac{1}{h} \|u_h - z_h\|_{L^\infty(L^1)} \right) \\ &\quad + hC(\beta) T e^{C(\beta)T} \|r\|_{L^\infty(W^{1,1})} \|r\|_{L^\infty(L^1)}, \end{aligned}$$

avec F croissante et $F(0) = 0$.

Références :

-  Bouchut, F. and Perthame, B., Kružkov's estimates for scalar conservation laws revisited, Trans. Amer. Math. Soc., 1998
-  Chen, G.-Q. and Karlsen, K. H., Quasilinear anisotropic degenerate parabolic equations with time-space dependent diffusion coefficients, Commun. Pure Appl. Anal., 2005
-  Colombo, R. M. and M. M. and Rosini, M.D., Stability and total Variation Estimates on General Scalar Balance Laws, Communications in Mathematical Sciences, 2009
-  Colombo, R. M. and Herty, M. and M. M., Control of the Continuity Equation with a Non-local Flow, submitted to Esaim-Cocv in 2009
-  Kružkov, S. N., First order quasilinear equations with several independent variables. , Mat. Sb. (N.S.), 1970
-  Lucier, B. J. , A moving mesh numerical method for hyperbolic conservation laws., Math. Comp. , 1986