Analyse complexe

Cédric Milliet

Version préliminaire

Cours de troisième année de licence

Université Galatasaray

Année 2011-2012

Ce cours doit beaucoup au chapitre Séries entières d'un cours de mathématiques spéciales de Marc Audran, ainsi qu'au cours d'analyse complexe de Michèle Audin.

L'analyse réelle, c'est l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et surtout des fonctions régulières : continues, dérivables, de classe C^1, C^∞ etc. En analyse complexe, nous allons étudier les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, continues, mais surtout dérivables. Pour une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on emploie le terme "holomorphe" plutôt que dérivable, et on verra qu'une fonction holomorphe, *ie* dérivable une fois au sens complexe, est infiniment dérivable. Nous démontrerons plus précisement le théorème suivant : une fonction f est "holomorphe en un point z_0" (c'est-à-dire que la limite $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$) si et seulement si f est développable en série entière autour de ce point (c'est-à-dire s'il existe un voisinage de z_0 sur lequel l'égalité $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ soit vérifiée). Ces théorèmes font intervenir des notions topologiques, et des résultats sur les séries numériques et séries de fonctions. Commençons donc par des rappels de topologie et d'analyse.

Rappels de topologie et d'analyse

1. Notions de topologie générale sur $\mathbb{C}$

– Muni du module $|\ .\ |$, le corps $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-**espace vectoriel normé** de dimension deux. Le module d'un nombre complexe $a+ib$ est $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$.

– Sur $\mathbb{C}$, toutes les **normes sont équivalentes**.

– $\mathbb{C}$ est **complet** : toute suite de Cauchy à valeurs complexes est convergente.

– **Boule ouverte** de centre z_0 et de rayon r :

$$B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

On dit souvent aussi "disque ouvert" de centre z_0 et de rayon r, que l'on note $D(z_0, r)$.

– **Boule fermée** de centre z_0 et de rayon r :

$$\bar{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$$

– **Les ouverts** de $\mathbb{C}$ sont les réunions de boules ouvertes. Par exemple,
le quadrant $\{z \in \mathbb{C} :\ Re(z) > 0\ et\ Im(z) > 0\}$
la couronne $\{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < 2\}$.

– **Les fermés** de $\mathbb{C}$ sont les complémentaires des ouverts.

– **Adhérence/intérieur** d'une partie A de $\mathbb{C}$:
$\bar{A}$ est l'intersection de tous les fermés de $\mathbb{C}$ contenant A.
$\mathring{A}$ est la réunion de tous les ouverts de $\mathbb{C}$ inclus dans A.

– Les parties **compactes** de $\mathbb{C}$: ce sont les fermés bornés de $\mathbb{C}$.

2. Séries à valeurs dans $\mathbb{C}$

– La **série de terme général** $(u_n)_{n\ge0}$: c'est la suite $(S_n)_{n\ge0}$ avec $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La série de terme général $(u_n)_{n\ge0}$ est **convergente** si la suite $(S_n)_{n\ge0}$ est convergente. Dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite (attention : ça n'est qu'une notation !).

– La série de terme général $(u_n)_{n\ge0}$ est **absolument convergente** si la série de terme général $(|u_n|)_{n\ge0}$ est convergente.

Théorème 1 (*échange* $\sum \sum$)

Soit $(u_{p,q})_{p\ge0,q\ge0}$ une famille de complexes indicée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Si

1. *Pour tout entier p, la série de terme général $(u_{p,q})_{q\ge0}$ est absolument convergente, et*
2. *la série de terme général $(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|)_{p\ge0}$ est absolument convergente,*

Alors les séries de terme $(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q})_{p\ge0}$, $(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q})_{q\ge0}$, et $(\sum_{p+q=n} u_{p,q})_{n\ge0}$ sont absolument convergentes et on a

$$\sum_{p=0}^{+\infty}(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}) = \sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}) = \sum_{q=0}^{+\infty}(\sum_{p+q=n} u_{p,q})$$

Corollaire 2

Soient deux séries à termes complexes de terme général $(u_n)_{n\ge0}$ et $(v_n)_{n\ge0}$ et absolument convergentes.

Alors la série de terme général $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = (\sum_{p=0}^{+\infty} u_p)(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q)$$

3. Séries de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, S une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et A une partie de $\mathbb{C}$. On appelle **série de fonctions** $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 0}$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$.

Définition 3 (*convergence simple, uniforme, normale d'une série de fonctions sur A*)

*On dit que la série de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ **converge vers** S*
- ***simplement sur** A si $(\forall z \in A)\ |S_n(z) - S(z)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*
- ***uniformément sur** A si $\sup_{z\in A} |S_n(z) - S(z)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$*
- ***normalement sur** A si $\sup_{z\in A} |f_n(z)|$ est le terme général d'une série convergente.*

Nota bene. La convergence normale sur A implique la convergence uniforme sur A, qui elle même implique la convergence simple sur A.

Théorème 4 (*échange* lim $\sum$)

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une série de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, A une partie de $\mathbb{C}$ et a un point adhérent à A. Si
1. *la série $(f_n)_{n\geq 0}$ converge normalement sur A, et*
2. *pour tout entier n, la limite $\lim_{z\to a} f_n(z)$ existe et vaut ℓ_n,*

alors la série l_n est convergente et

$$\lim_{z\to a}(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(\lim_{z\to a} f_n(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Pour les séries de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

Théorème 5 (*échange* $\int_a^b \sum$)

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$, et qui converge uniformément sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x))dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(\int_a^b f_n(x)dx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$$

Chapitre 1

Séries entières et fonctions analytiques

1.1 Rappels sur les séries entières

1.1.1 Définitions

Définition 6 (*série entière*)

On appelle **série entière** $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *la série de fonction* $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *où* $(a_n)_{n\geq 0}$ *est une suite de complexes.*

Définition 7 (*rayon de convergence*)

On appelle **rayon de convergence** *de la série entière* $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *la quantité*

$$\rho = \sup\{r \in [0, +\infty[\ : \ \textit{la série entière } (|a_n| r^n)_{n\geq 0} \textit{ converge}\}$$

Nota bene. ρ est le sup d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, réel si cette partie est majorée, égal à $+\infty$ sinon.

1.1.2 Propriétés

Lemme 8 (*Lemme d'Abel*)

Soient deux réels $r_0 > 0$ *et* $M > 0$ *tels que*

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad |a_n| r_0^n \leq M$$

Alors, pour tout $r < r_0$*, la série* $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *converge normalement sur* $\overline{B}(0, r)$*.*

Proposition 9

Soit une série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *de rayon de convergence* ρ*.*

1. *pour tout* $r < \rho$*, la série* $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *converge normalement sur le disque* $\overline{B}(0, r)$*.*
2. *la série* $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *diverge pour tout* $z \notin \overline{B}(0, \rho)$*.*

Nota bene.
1. Attention au bord...
2. Si $|a_{n+1}/a_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, le rayon de convergence de $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ est $1/\ell$.
3. Soient deux séries $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ et $(b_n z^n)_{n\geq 0}$ de rayon de convergence ρ_1 et ρ_2. Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $\rho_2 \leq \rho_1$.

Proposition 10 (*somme et produit de séries entières*)

Soient $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n z^n)_{n\geq 0}$ *deux séries entières de rayon de convergence respectif* ρ_1 *et* ρ_2*. Soit* $s_n = a_n + b_n$ *et* $p_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$*. Alors les séries entières* $(s_n z^n)_{n\geq 0}$ *et* $(p_n z^n)_{n\geq 0}$ *ont un rayon de convergence au moins égal à* $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ *et pour tout* $|z| < \min\{\rho_1, \rho_2\}$ *on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$$

$$(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$$

1.2 Fonctions analytiques

1.2.1 Definitions

Définition 11 (*fonction analytique*)

Soit z_0 dans $\mathbb{C}$. Soit U un voisinage de z_0 et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f est ***analytique en*** *z_0 si f est développable en série entière au voisiange de z_0, i.e. s'il existe un $r > 0$ et une série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ de rayon de convergence $\rho \geq r$ telle que*

$$(\forall z \in \overline{B}(z_0, r)) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

On dit que f est ***analytique sur*** *U si elle est analytique en tout point de U.*

Exemple. 1. un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ est analytique en 0, et même en tout point z_0 de $\mathbb{C}$: d'après la formule de Taylor,

$$\text{si } P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \text{ alors } P(z) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$$

2. e^z est analytique en 0. La somme d'une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ est analytique en 0. Nous verrons qu'elle est analytique sur l'intérieur de son disque de convergence.

Proposition 12

L'ensemble des fonctions analytiques sur l'ouvert U est une algèbre sur $\mathbb{C}$.

Notation. On la note $\mathcal{O}(U)$.

1.2.2 Propriétés

Proposition 13 (*Principe des zéros isolés, version série entière*)

Soit $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et de somme $f(z)$. Si au moins un des coefficients a_n est nul, il existe un $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $B(0, r) \setminus \{0\}$.

Corollaire 14

Une fonction analytique sur un ouvert U a un unique développement en série entière au voisinage de chaque point de U.

Rappels de topologie

Proposition-définition 15 (*connexe*)

Soit un espace topologique X. On dit que X est ***connexe*** *si de manière équivalente*

1. *X n'est pas réunion de deux ouverts non vides disjoints.*
2. *X n'est pas réunion de deux fermés non vides disjoints.*
3. *les seules parties à la fois fermées et ouvertes de X sont $\emptyset$ et X.*

Exemples. 1. dans $\mathbb{R}$, les parties connexes sont les intervalles. Une réunion de deux intervalles disjoints n'est pas connexe.

2. dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, une partie convexe est connexe.
3. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est connexe.
4. une boule d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé est connexe.

Nota bene. être connexe, c'est être "en un seul morceau".

Définition 16 (*point d'accumulation*)

Soit A une partie de $\mathbb{C}$ et a un nombre complexe. On dit que a est un ***point d'accumulation de*** *A si le singleton $\{a\}$ n'est pas un ouvert de $A \cup \{a\}$ (pour la topologie induite).*

Exemple. 0 est un point d'accumultaion de l'ensemble $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$.

Proposition 17 (***Principe du prolongement analytique***)

U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions analytiques sur U, A une partie de U et a un nombre complexe dans U. Si a est un point d'accumulation de A et si f et g coïncident sur A, alors elles coïncident sur U.

Nota bene. En particulier, si f est analytique et nulle sur un segment (ou une courbe, ou un ouvert) non vide de U, alors f s'annule sur U tout entier.

Nota bene. Si $V \subset U$ sont deux ouverts non vides avec U connexe et si f est analytique sur V, on appelle **prolongement analytique de f à U** toute fonction analytique sur U qui coïncide avec f sur V. Un tel prolongement est unique s'il existe.

Proposition 18 (***Principe des zéros isolés***)

f est une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas la fonction nulle, et si $f(z_0) = 0$, alors il existe un $r > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

1.3 Analycité des séries entières

Proposition-définition 19 (***série dérivée***)

*Soit $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ une série entière de somme $f(z)$ et de rayon de convergence $\rho > 0$. On appelle **série dérivée** de $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ la série entière $(n a_n z^{n-1})_{n \geq 1}$, et **dérivée de f** la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$. Son rayon de convergence est ρ aussi.*

Corollaire 20

Une fonction analytique sur U y admet des dérivées de tout ordre.

Nota bene. On note $f'(z)$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$.

Proposition 21

f est la somme d'une série entière de rayon de convergence ρ. Pour tout z dans $B(0, \rho)$, on a

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Théorème 22 (***Analycité des séries entières***)

La somme d'une série entière est analytique à l'intérieur de son disque de convergence. Plus précisément, siot $(a_n z^n)_{n \geq 0}$ une série entière de rayon de convergence ρ et de somme $f(z)$. Soit z_0 dans $B(z_0, \rho)$. Alors

$$\forall z \in B(z_0, \rho - |z_0|) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Nota bene. En particulier, la série $(\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z)^n)_{n \geq 0}$ a un rayon de convergence au moins égal à $\rho - |z_0|$.

1.4 Exponentielle, logarithme

1.4.1 Définition, propriétés de l'exponentielle

Définition 23 (***exponentielle***)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Propriétés 24

1. *la fonction $z \mapsto e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$ et y admet des dérivées de tout ordre.*
2. *$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$*

3. $(\forall z \in \mathbb{C})\quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
4. $(\forall y \in \mathbb{R})\quad |e^{iy}| = 1$

Nota bene. On peut ainsi, indépendament du logarithme définir la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe e^x. Elle est continue et même C^∞ sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, et vérifie $e^x e^{-x} = 1$. De plus, pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $e^x \geq x^n/n!$ donc $\lim_{+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{-\infty} e^x = 0$. Enfin, $e^x > 0$ pour tout x réel donc $x \mapsto e^x$ réalise une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On appelle ln sa bijection réciproque.

1.4.2 Fonctions circulaires de la variable réelle

Définition 25 (*cosinus et sinus*)

Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\cos x = Re(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = Im(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Nota bene. Comme $(\forall x \in \mathbb{R})\ |e^{ix}| = 1$, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Propriétés 26

1. *Les fonctions* sin *et* cos *sont C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus,* $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = \cos$.
2. *On retrouve les formules trigonométriques usuelles grâce à* $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$

Reste à étudier la périodicité de ces fonctions.

Lemme 27

La fonction cos *s'annule sur* $\mathbb{R}^+$.

Définition 28 (*pi*)

On appelle π le nombre $2\inf\{x > 0 : \cos x = 0\}$.

Proposition 29

cos *et* sin *sont périodiques de période* 2π.

1.4.3 Etude de $z \mapsto e^z$

Propriétés 30

1. $(\forall z \in \mathbb{C})\quad e^z = e^{z+2i\pi}$
2. *$z \mapsto e^z$ a pour image $\mathbb{C}^*$.*
3. *Plus précisément, les solutions de $e^z = a = re^{i\theta}$ sont* $\ln r + i(\theta + 2\pi\mathbb{Z})$.
4. *L'application $x \mapsto e^{ix}$ est surjective de $\mathbb{R}$ dans le cercle unité.*

1.4.4 Logarithme népérien

Définition 31

On appelle **logarithme népérien**, *noté* ln, *la fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ réciproque de l'exponentielle.*

Proposition 32

ln *est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est* $x \mapsto 1/x$.

1.4.5 Logarithme complexe

Définition 33 (*détermination du logarithme sur un ouvert U*)

U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$. On appelle ***détermination du logarithme sur*** *U toute fonction f* ***continue*** *de U dans $\mathbb{C}$ vérifiant $e^{f(z)} = z$ pour tout z de U.*

Nota bene. $z \mapsto e^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ mais non injective.

Propriétés 34

1. *Il n'y a pas de détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.*
2. *Si f et g sont deux détermination du logaritme sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}^*$, il existe un k dans $\mathbb{Z}$ tel que $f = g + 2ik\pi$.*

Proposition 35 (*détermination du logarithme sur $B(1,1)$*)

La série entière $((-1)^{n-1}z^n/n)_{n\geq 0}$a pour rayon de convergence 1. La somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n}$$

est une détermination du logarithme sur le disque $B(1,1)$.

Proposition 36 (*détermination du logarithme sur toute boule ouverte ne contenant pas 0*)

Soit z_0 dans $\mathbb{C}^*$ et θ_0 un argument de z_0. La somme

$$ln|z_0| + i\theta_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)}{n}^{n-1}\left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^n$$

est une détermination du logarithme sur le disque $B(z_0, |z_0|)$.

Proposition 37 (*détermination analytique du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$*)

La fonction f définie par

$$f(z) = \begin{cases} ln|z| + i\arcsin(Im(z)/|z|) & \text{si } Re(z) \geq 0 \\ ln|z| + i(\pi - \arcsin(Im(z)/|z|)) & \text{si } Re(z) \leq 0 \text{ et } Im(z) \geq 0 \\ ln|z| - i(\pi + \arcsin(Im(z)/|z|)) & \text{si } Re(z) \leq 0 \text{ et } Im(z) \leq 0 \end{cases}$$

est une détermination analytique du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Proposition 38 (*détermination analytique du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^+e^{i\theta})$*)

Il existe une détermination analytique du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^+e^{i\theta})$.

Chapitre 2

Fonctions holomorphes

2.1 Définitions, propriétés

Définition 39 (***fonction dérivable au sens complexe***)

*U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. Soit z_0 dans U. On dit que f est **dérivable en** z_0 si la limite $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{C}}} \dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe. Dans ce cas, on note $f'(z_0)$ cette limite.*

Définition 40 (***fonction holomorphe***)

*U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f **est holomorphe sur** U si f est dérivable en tout point z de U et si la dérivée f' est continue sur U.*

Nota bene.

1. f est dérivable en z_0 si et seulement si

$$f(z_0+h) = f(z_0) + h.f'(z_0) + h.\alpha(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$

2. Si a est un nombre complexe, l'application $z \mapsto a.z$ est une transformation du plan appelée similitude. En écrivant a sous la forme $re^{i\theta}$, on se convainc qu'une similitude est la composé d'une rotation et d'une homothétie. En particulier, elle conserve les angles.
3. Dans la plupart des livres, on ne demande pas à une fonction holomorphe f que sa dérivée f' soit continue. Nous verrons que ces deux définitions sont équivalentes.

Proposition 41

U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f et g deux fonctions holomorphes sur U.

1. $(\forall\lambda\in\mathbb{C})\ (\lambda.f)' = \lambda.f'$
2. $(f+g)' = f'+g'$
3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$
4. *Si f ne s'annule pas sur U, $1/f$ est holomorphe sur U et $(1/f)' = -f'/f^2$.*
5. *Si h est une fonction d'un ouvert V de $\mathbb{C}$ à valeurs dans U qui soit holomorphe sur V, alors $g\circ h$ est holomorphe sur V et $(g\circ h)' = (g'\circ h).h'$.*

Corollaire 42

L'ensemble des fonctions holomorphes sur U est une $\mathbb{C}$-algèbre (pour $+$ et $\times$).

Proposition 43 (***"Les fonctions holomorphes conservent les angles"***)

U est un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe sur U et z_0 un point de U. On suppose que $f'(z_0)\neq 0$. Soient $\gamma_1 : [0,1] \to U$ et $\gamma_2 : [0,1] \to U$ deux courbes de classes C^1 sur $[0,1]$ se coupant en z_0 avec $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0$. Si z_0 est un point régulier de γ_1 et γ_2, soient $\overrightarrow{t_1}$ et $\overrightarrow{t_2}$ les vecteurs tangents à γ_1 et γ_2 en z_0. Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ les vecteurs tangents à $f\circ\gamma_1$ et $f\circ\gamma_2$ en $f(z_0)$. Alors

$$(\widehat{\overrightarrow{t_1},\overrightarrow{t_2}}) = (\widehat{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}})$$

2.2 Analycité des fonctions holomorphes

Remarque. Si $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ est une série entière de rayon de convergence $\rho > 0$ et de somme $f(z)$, on peut retrouver les coefficients a_n par la formule $a_n = f^{(n)}(0)/n!$. Mais on a aussi pour tout $0 < r < \rho$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$$

Théorème 44 (*Cauchy*)

Soit f une fonction holomorphe sur $B(0,\rho)$.

1. *le nombre $a_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$ ne dépend pas de $r < \rho$.*
2. *la série entière $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ a un rayon de convergence au moins égal à ρ.*
3. *$(\forall z \in B(0,\rho))\quad f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$*

Nota bene.

1. Au cours de la démonstration, on a montré la formule $f(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{re^{it}-z}re^{it}dt$ pour $|z| < r < \rho$.
2. Si g est holomorphe sur $B(z_0,\rho)$, alors la fonction $f : z \mapsto g(z_0 + z)$ est holomorphe sur $B(0,\rho)$. On peut donc lui appliquer le théorème précédent et on a

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ sur } B(z_0,\rho) \text{ avec } a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{it})e^{-int}dt$$

Corollaire 45

Soit f holomorphe sur $B(z_0,\rho)$ et $0 < r < \rho$. Alors

$$(\forall z \in B(z_0,r))\quad f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{z_0+re^{it}-z}re^{it}dt$$

Corollaire 46

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. La fonction f est holomorphe sur U si et seulement si elle est analytique sur U.

Corollaire 47

Soit f une fonction holomorphe sur $B(z_0,r)$. Alors f est somme de sa série de Taylor en z_0 sur $B(z_0,r)$, c'est-à-dire

$$(\forall z \in B(z_0,r))\quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Nota bene. En particulier, une fonction analytique sur $B(z_0,r)$ est développable en série entière en z_0 sur $B(z_0,r)$ tout entier.

Corollaire 48

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction analytique sur U et g analytique sur V avec $f(U) \subset V$. Alors la composée $g \circ f$ est analytique sur U.

Corollaire 49 (*inégalité de Cauchy*)

Soit f holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit z_0 dans U et $\overline{B}(z_0,r) \subset U$. Alors, pour tout entier n on a

$$\left|\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{1}{r^n}\sup_{t\in[0,2\pi]}\left|f(z_0+re^{it})\right|$$

Corollaire 50 (*égalité de Cauchy*)

Soit f holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, soit z_0 dans U et $\overline{B}(z_0,r) \subset U$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0+re^{it})\right|^2 dt$$

2.3 Liouville, D'Alembert-Gauss, principe du module maximum et application ouverte

Théorème 51 (*Liouville*)

Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui est bornée est constante sur $\mathbb{C}$.

Théorème 52 (*D'Alembert Gauss*)

Soit P un polynôme à coefficients complexe. Si P n'a pas de racine dans $\mathbb{C}$, il est constant.

Nota bene. En faisant la division euclidienne de P par $X - \alpha$ où α est la racine de P et en itérant, on montre que P se factorise par des polynômes de degré un.

Théorème 53 (*principe du module maximum*)

U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f holomorphe sur U. Si $|f|$ admet un maximum local en un point z_0 de U, alors f est constante sur U.

Nota bene.
1. Dans le *paysage analytique de f sur U* (*i.e.* le graphe de $|f|$ comme surface de $\mathbb{R}^3$), il n'y a pas de "sommets".
2. Si f possède un maximum global sur $\overline{U}$ (c'est le cas si $\overline{U}$ est compact et f continue sur $\overline{U}$), alors ce maximum est atteint sur la frontière de $\overline{U}$.

Théorème 54 (*application ouverte*)

U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f est holomorphe sur U et non constante. L'image par f de tout ouvert de U est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Nota bene.
1. Un ouvert de U, c'est un ouvert de $\mathbb{C}$.
2. L'image d'un ouvert non vide par une application holomorphe non constante n'est pas "petite".

2.4 Equations de Cauchy Riemann

2.4.1 Applications $\mathbb{R}$-linéaires, applications $\mathbb{C}$-linéaires

Rappel. On note $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. C'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, isomorphe à $M_2(\mathbb{R})$: chaque u de $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$ peut être représenté par une matrice à coefficients réels dans la base canonique de $\mathbb{C}$.

Nota bene. Si u est dans $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ (*i.e.* si u est $\mathbb{C}$-linéaire), alors $u(z) = a.z$ pour un certain a de $\mathbb{C}$. $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Si une application u est $\mathbb{C}$-linéaire, elle est aussi $\mathbb{R}$-linéaire : on a $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \subset L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. Parmi les matrices représentant les applications de $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$, on reconnaît ainsi celles d'une application de $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$:

Proposition 55

Soit u dans $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})$. L'application u est dans $L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ si et seulement si sa matrice dans la base canonique $(1,i)$ de $\mathbb{C}$ est du type $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels.

2.4.2 Fonction différentiable et fonction holomorphe

Rappel. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de U dans $\mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) un point de U. On dit que f est *différentiable* en (x_0, y_0) si l'on peut trouver deux vecteurs a, b et une fonction β tels que pour tous réels k et ℓ on ait

$$f(x_0 + k, y_0 + \ell) = f(x_0, y_0) + a.k + b.\ell + \beta(k, \ell).\sqrt{k^2 + \ell^2} \quad \text{avec } \lim_0 \beta = 0$$

Ici, k et ℓ sont réels et $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont dans $\mathbb{R}^2$.

On peut voir f comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ en posant

$$z = x + iy = (x, y), \quad z_0 = (x_0, y_0), \quad \text{et} \quad h = (k, \ell)$$

On a alors

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + a.k + b.\ell + \beta(h).|h| \quad \text{avec } \lim_0 \beta = 0$$

Remarquez que l'application $h \mapsto a.k + b.\ell$ est $\mathbb{R}$-linéaire. C'est ce qu'on appelle la *différentielle de f* au point (x_0, y_0). Sa matrice dans la base $(1, i)$ est appelée *Jacobienne de f en* (x_0, y_0).

Rappel. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. f est dérivable au sens complexe en z_0 si on peut trouver un complexe α et une application γ tels que pour tout complexe h on ait

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + h.\alpha + \gamma(h).|h| \quad \text{avec } \lim_0 \gamma = 0$$

Cette fois ci, l'application $h \mapsto h.\alpha = \alpha.k + i\alpha.\ell$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Nota bene. Une application dérivable au sens complexe en z_0 est différentiable en z_0. Réciproquement :

Proposition 56

Soit un ouvert U de $\mathbb{C}$, une application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et z_0 dans U. L'application f est dérivable au sens complexe en z_0 si et seulement si elle est différentiable en z_0 (i.e. admet des dérivées partielles en z_0) et si ses dérivées partielles satisfont l'une des deux choses équivalentes suivantes :

1. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(z_0) = 0$
2. $\begin{cases} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} - \dfrac{\partial Q}{\partial y}\right)(z_0) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)(z_0) = 0 \end{cases}$ *avec $P(z) = Re(f(z))$ et $Q(z) = Im(f(z))$.*

Nota bene. Ces équations signifient simplement que la Jacobienne de f au point (x_0, y_0) est la matrice d'une application $\mathbb{C}$-linéaire.