

Géométrie analytique

Cédric Milliet

Version préliminaire



Cours de première année de licence

Université Galatasaray

Année 2011-2012

Ces notes doivent beaucoup aux notes de cours de Marie-Christine Pérouème.

Qu'est-ce que la géométrie analytique ? Le terme *géométrie* vient du grec "mesure de la terre". C'est avant tout l'étude des "figures" du plan et de l'espace. L'analyse, c'est l'étude des fonctions *régulières* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire des fonctions continues, dérivables etc. Comme son nom l'indique, la géométrie analytique fait le pont entre ces deux domaines : c'est une approche de la géométrie dans laquelle les objets (les points, les droites, les courbes etc.) sont représentés à l'aide de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (coordonnées d'un point, équation d'une droite, paramétrage d'une courbe) ; cela permet de passer de problèmes de nature géométrique (comme trouver l'intersection de tel objet avec tel autre), à des problèmes d'analyse (résoudre une équation ou un système d'équations), et réciproquement.

Chapitre 1

Géométrie du plan

1.1 Colinéarité et orthogonalité dans $\mathbb{R}^2$

1.1.1 Définitions

On note $\mathbb{R}^2$ le plan euclidien, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x, y) . On notera souvent $\vec{u}$ un élément de $\mathbb{R}^2$ que l'on appellera *vecteur du plan*. Si $\vec{u}$ est le vecteur (x, y) , on appelle x sa *première coordonnée*, et y sa *seconde coordonnée*.

Définition 1 (*vecteurs colinéaires*)

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont **colinéaires** s'il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Nota bene. 1. Tous les vecteurs sont colinéaires au vecteur nul.

2. La colinéarité est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. La classe d'équivalence d'un vecteur $\vec{u}$ est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$: c'est la droite vectorielle de direction $\vec{u}$.
3. Si $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$ sont colinéaires, alors on a

$$\lambda \cdot (a, b) = (c, d) \quad \text{ou} \quad \lambda \cdot (c, d) = (a, b) \quad \text{et donc} \quad ad = bc$$

Réciproquement, si $ad = bc$, et si on suppose qu'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ n'est pas nul (avec par exemple $a \neq 0$), alors on a

$$\vec{u} = (a, b) = \frac{1}{c}(ac, bc) = \frac{1}{c}(ac, ad) = \frac{a}{c}(c, d) = \frac{a}{c}\vec{v}$$

Définition 2 (*déterminant*)

On appelle **déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$** le réel

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$$

Notation. On note aussi ce déterminant $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$.

Proposition 3

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v})$ est nul.

Définition 4 (*produit scalaire, vecteurs orthogonaux, norme*)

On appelle **produit scalaire de $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$** le réel

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = ac + bd$$

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$. On appelle **norme** du vecteur $\vec{u}(a, b)$ le réel positif

$$\|u\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

1.1.2 Propriétés

Propriétés 5

1. $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$ (le déterminant est antisymétrique).
2. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (le produit scalaire est symétrique).
3. $\det(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{w}) + \mu \det(\vec{v}, \vec{w})$ et
 $\det(\vec{w}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda \det(\vec{w}, \vec{u}) + \mu \det(\vec{w}, \vec{v})$
4. $\langle \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \mu \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ et
 $\langle \vec{w}, \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \mu \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ (on dit que $\det$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont bilinéaires).

On peut ainsi calculer

$$\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Proposition 6 (Théorème de Pythagore)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2$$

Lien entre déterminant et produit scalaire

Définition 7 (vecteur normal)

Soit un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (a, b) . Le vecteur $\vec{n}_u$ de coordonnées $(-b, a)$ est appelé le **vecteur normal au vecteur $\vec{u}$** .

Proposition 8

Le vecteur normal vérifie, pour tout vecteur du plan $\vec{v}$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \langle \vec{n}_u, \vec{v} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\det(\vec{n}_u, \vec{v})$$

Ainsi les vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ sont exactement les vecteurs orthogonaux à $\vec{n}_u$ et réciproquement.

Interprétation géométrique du déterminant et du produit scalaire

Un calcul élémentaire montre que :

$$(aa' + bb')^2 + (ab' - ba')^2 = (a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)$$

autrement dit :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 + \det(\vec{u}, \vec{v})^2 = \| \vec{u} \|^2 \cdot \| \vec{v} \|^2$$

Cela justifie la définition suivante :

Définition 9 (angle entre deux vecteurs)

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, il existe un unique réel modulo 2π tel que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \cos \theta \quad \text{et} \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \| \sin \theta$$

Proposition 10 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

$$| \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle | \leq \| \vec{u} \| \cdot \| \vec{v} \|$$

Il y a égalité si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Nota bene. On interprète le déterminant comme l'aire algébrique du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En particulier, l'aire d'un triangle ABC est égale à $\det(\vec{AB}, \vec{AC})/2$.

1.2 Droites du plan affine

Après le choix d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$, tout point M du plan euclidien est caractérisé par ses coordonnées (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, qui vérifient :

$$M(x, y) \iff O\vec{M} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Dans la suite, le repère sera supposé orthonormé (ie $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de norme 1).

1.2.1 Equations cartésiennes de droites

Une droite D du plan cartésien est caractérisée par la donnée d'un point A de D et d'un vecteur directeur $\vec{u} \neq 0$ ou de deux points distincts A et B de D . Dans ce cas, le vecteur $\vec{u} = \vec{AB}$ est un vecteur directeur de D . On note $(A, \vec{u})$ la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et (AB) celle passant par A et B . On a alors

$$M \in (A, \vec{u}) \iff A\vec{M} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \iff \det(A\vec{M}, \vec{u}) = 0$$

Mais aussi

$$M \in (A, \vec{u}) \iff A\vec{M} \text{ et } \vec{n}_u \text{ sont orthogonaux} \iff \langle A\vec{M}, \vec{n}_u \rangle = 0$$

En posant $A(x_A, y_A)$, $M(x, y)$ et $\vec{u}(a, b)$, on a $A\vec{M}(x - x_A, y - y_A)$, d'où l'égalité

$$M \in D \iff bx - ay = bx_A - ay_A$$

Proposition 11

Une droite du plan a une équation de la forme $\alpha x + \beta y = \gamma$ où α, β et γ sont trois réels. Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y)$ qui vérifient une équation du type $\alpha x + \beta y = \gamma$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(\beta, -\alpha)$ et de vecteur normal $\vec{n}(\alpha, \beta)$.

1.2.2 Intersection de droites

Soient D la droite $(A, \vec{u})$ et D' la droite $(A', \vec{u}')$. Alors l'intersection de D et D' est soit vide si D et D' sont parallèles et disjointes, soit égale à D si les droites D et D' sont parallèles et confondues, soit réduite à un seul point sinon. On en déduit :

Proposition 12

Le système $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$ a une unique solution si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$ est non nul. Cette solution est alors donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

1.2.3 Distance d'un point à une droite

Proposition-définition 13 (projeté orthogonal, distance d'un point à une droite)

D est une droite du plan et H un point quelconque. Il existe un unique point P de la droite D tel que les droites PH et D soient perpendiculaires. Ce point P vérifie :

$$(\forall M \in D) \quad d(M, H)^2 = \|\vec{MH}\|^2 = \|\vec{MP}\|^2 + \|\vec{PH}\|^2 \geq \|\vec{PH}\|^2 = d(P, H)^2$$

On appelle P le **projeté orthogonal** de H sur D et $d(P, H)$ la **distance** de H à la droite D . On la note $d(H, D)$, et on a

$$d(H, D) = \min_{M \in D} d(H, M)$$

Proposition 14

Si la droite D est donnée par l'équation $\alpha x + \beta y = \gamma$ et si H a pour coordonnées (x, y) , on a

$$d(H, D) = \frac{|\alpha x + \beta y - \gamma|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

Chapitre 2

Etude des courbes du plan

Le but du chapitre est double : étant donné une courbe (un objet géométrique), comment la mettre en équation ? Et réciproquement, étant donné un paramétrage (un système d'équations), comment tracer le plus précisément possible la courbe qu'il représente (avec tangentes, asymptotes, concavités etc.) Il y a de nombreuses manières de paramétrer une courbe. Nous en verrons principalement deux : le paramétrage des coordonnées cartésiennes, et celui en coordonnées en polaires.

2.1 Courbes en polaire

Chapitre 3

Géométrie de l'espace