# Feuille de TD # 6
## Transformée de Fourier, distributions tempérées

**NB.** Le cadre est le suivant :

i) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue $\lambda_n$. Les espaces $L^p$ et $\mathscr{L}^p$ sont considérés par rapport à ce cadre.

ii) $\cdot$ est le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$.

iii) Dans cette feuille, $|\ |$ est la norme euclidienne usuelle, $\|\ \|_2$, dans $\mathbb{R}^n$.

iv) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ($\alpha$ est un *multi-indice*) et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $x^\alpha := (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n}$.

v) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| := |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$.

vi) Pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\partial^\beta f(x) := \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}}(x).$$

vii) Pour $1 \leq j \leq n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\partial_j f(x) := \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

**Exercice # 1. (Classe de Schwartz et distributions tempérées)** On définit la *classe de Schwartz* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (ou l'*espace de Schwartz*) comme l'ensemble des fonctions de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, au sens suivant : une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si

$$p_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty, \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

1. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que :
   (a) $\partial^\alpha f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$.
   (b) $\lim\limits_{|x| \to \infty} |\partial^\alpha f(x)| = 0, \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$.
2. Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ a une structure naturelle d'espace métrique complet.
3. Soit

$$N_k(f) := \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq k} p_{\alpha,\beta}(f) = \sum_{|\alpha|,\, |\beta| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|, \ \forall\, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

   Montrer qu'une suite $(f_j)_{j \geq 0}$ de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\lim\limits_{j \to \infty} N_k(f_j - f) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Montrer qu'une forme linéaire $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ est continue si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|T(f)| \leq C N_k(f), \; \forall\, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est appelé *distribution tempérée*.

5. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
6. Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$, et que cette inclusion est continue.
7. Montrer que $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{-x^2}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto e^{-(Ax)\cdot x}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

**Exercice # 2. (Transformée de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$)** Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et que

$$\partial_j(\widehat{f})(\xi) = \widehat{-\imath x_j f}(\xi), \; \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \; \forall\, 1 \leq j \leq n.$$

2. Montrer que

$$\widehat{\partial_j f}(\xi) = \imath \xi_j \widehat{f}(\xi), \; \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \; \forall\, 1 \leq j \leq n.$$

3. Montrer que $\mathscr{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
4. Montrer que $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est linéaire et continue.

**Exercice # 3. (Familles régularisantes)** Cet exercice prépare à l'exercice suivant. Une *famille* $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est *régularisante* si :

(i) $\rho^\varepsilon \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\rho \geq 0$.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho^\varepsilon(x)\, dx = 1$.

(iv) Pour tout $\delta > 0$ et $R > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \rho^\varepsilon(x)\, dx < \delta, \; \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0.$$

1. Soit $\rho \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\rho \geq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$. Soit $\rho_\varepsilon(x) := \dfrac{1}{\varepsilon^n}\rho(x/\varepsilon)$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est régularisante.
2. Soit $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille régularisante. Si $f \in C(\mathbb{R}^n)$ et $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, montrer que $f * \rho_\varepsilon \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \to 0$.

**Exercice # 4. (Formule d'inversion)**

Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$F_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}\, d\xi, \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Rappeler la valeur de $F_\varepsilon(x)$.
2. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que
   $$\int_{\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(x-y)f(y)dy = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}\widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$
   (b) Montrer que
   $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(x-y)f(y)dy = f(x).$$
   (c) En déduire la *formule d'inversion*
   $$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi,\ \forall\, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$
3. Retrouver la formule d'inversion de la transformée de Fourier sur $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ : pour toute $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, on a
   $$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)\,d\xi\ \lambda_n-\ \text{p. p.}$$

**Exercice # 5. (Théorème de Plancherel, again)** Soit $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$.

1. Montrer que pour tout $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,
   $$\langle \varphi, \psi\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n}\langle \widehat{\varphi}, \widehat{\psi}\rangle.$$
   On commencera par donner un sens à cette égalité.
   Indication : utiliser la formule d'inversion de la transformée de Fourier.
2. Montrer que la transformée de Fourier $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$, tel que
   $$\|f\|_2^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\left\|\widehat{f}\right\|_2^2,\ \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^n),$$
   $$f = \frac{1}{(2\pi)^n}\widehat{\widehat{\check{f}}},\ \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

**Exercice # 6. (Principe de localisation)** Cet exercice prépare la question 4 de l'exercice suivant.

S'inspirer de l'exercice 14, feuille 2, pour montrer le résultat suivant : soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si $K \subset \Omega$ est un compact, montrer que
$$\int_K |f(x)|\,dx = \sup\left\{\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx\,;\ \varphi \in C_c^\infty(K),\ |\varphi(x)| \le 1,\ \forall\, x \in \Omega\right\}.$$

En particulier, nous avons le *principe de localisation*
$$\left[\int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx = 0,\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\right] \implies f = 0.$$

**Exercice # 7. (Distributions tempérées et transformée de Fourier)**

1. Montrer qu'une masse de Dirac $\delta_a : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, f \mapsto f(a), a \in \mathbb{R}^n$, est une distribution tempérée.
2. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \le p \le \infty$. On définit $T_f : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ par
$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,\ \forall\,\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$
Montrer que $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que si $f$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^n$, alors on peut associer naturellement à $f$ un élément $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, par la formule ci-dessus. De même si $f = P\,g$, avec $P$ polynomiale et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
4. Dans les deux cas, montrer que $f \mapsto T_f$ est injective.
Par abus de notation, dans ces cas on écrit $f$ à la place de $T_f$. Ainsi,
$$x(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} x\,\varphi(x)\,dx,\ \forall\,\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$
5. **(Transformée de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$)** On définit la transformée de Fourier $\widehat{T}$ d'une distribution tempérée $T$ par
$$\widehat{T}(\varphi) = T(\widehat{\varphi}),\ \forall\,\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$
   (a) Montrer que pour tout $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,
   $$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\widehat{\psi}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx.$$
   En déduire que, si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.
   (b) De même si $f \in L^1$ ou $f \in L^2$.
   (c) Calculer la transformée de Fourier de $\delta_0$. Calculer de même la transformée de Fourier de $\delta_a$, $a \in \mathbb{R}^n$.
   (d) **(Formule d'inversion)** Soit $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $T = \widehat{S}$, où
   $$S(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} T\left(\check{\widehat{\varphi}}\right),\ \forall\,\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$
   (e) Calculer $\widehat{1}$.

**Exercice # 8. (Transformée de Fourier d'une gaussienne complexe)** On note, pour $z \in \mathbb{C}$, $g_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ g_z(x) := e^{-zx^2}, \forall\,x \in \mathbb{R}$.

1. On suppose d'abord que Re $z > 0$.
   (a) Montrer que $g_z \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \text{Re}\, z > 0\} \ni z \mapsto F(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{-zx^2}\, dx$$

est holomorphe. En examinant les valeurs de $F$ pour $z$ réel, en déduire que

$$F(z) = \sqrt{\frac{\pi}{z}}, \forall\, z \in \mathbb{H},$$

où $\sqrt{\ }$ désigne la détermination principale de la racine carrée.

(c) Calculer la dérivée de $\widehat{g_z}$. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{g_z}$.

(d) En déduire que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{g_z}(\xi) = \sqrt{\dfrac{\pi}{z}}\, e^{-\xi^2/(4z)}$.

2. On suppose maintenant Re $z = 0$.
   (a) Montrer que $g_z \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
   (b) En utilisant le résultat de la question précédente pour $z + \varepsilon$, $\varepsilon$ réel $> 0$, calculer la tranformée de Fourier de $g_z$. On justifiera rigoureusement le passage à la limite $\varepsilon \to 0$.

**Exercice # 9**. Cet exercice prépare à l'exercice suivant.

1. Si $\alpha > 0$, $\beta > \alpha$, soit

$$J = J_{\alpha,\beta} := \int_0^\infty \frac{r^{\alpha-1}}{(1+r^2)^{\beta/2}}\, dr.$$

En se ramenant à un calcul de fonction Bêta, montrer que

$$J_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha/2)\Gamma((\beta-\alpha)/2)}{\Gamma(\beta/2)}.$$

On pourra, par exemple, faire le changement de variable $r = \sqrt{\dfrac{t}{1-t}}$, $0 < t < 1$.

2. Montrer qu'il existe une constante $0 < C_n < \infty$ telle que, pour toute fonction borélienne $f : ]0,\infty[ \to [0,\infty[$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = C_n \int_0^\infty r^{n-1}\, f(r)\, dr.$$

(On peut montrer que $C_n = \dfrac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, mais ceci n'est pas significatif pour ce qui suit.)

3. Montrer que

$$\frac{1}{C_n\,\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{a-n}\, e^{-c|y|}\, dy = \frac{1}{c^a},\ \forall\, a > 0,\ \forall\, c > 0.$$

**Exercice # 10. (Transformée de Fourier du noyau de Riesz)** Pour $0 < a < n$, soit $I_a(x) := \dfrac{1}{|x|^a}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. ($I_a$ est le *noyau de Riesz*.) Le but de cet exercice est de calculer $\widehat{I_a}$.

1. Montrer que $I_a \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
2. Pour $\varepsilon > 0$, soit
$$I_{a,\varepsilon}(x) := I_a(x)\, e^{-\varepsilon|x|},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$
Montrer que $I_{a,\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. En partant de la formule
$$I_{a,\varepsilon}(x) = \frac{1}{C_n\,\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{a-n} e^{-(|y|+\varepsilon)|x|}\, dy$$
(voir la question 3 de l'exercice précédent) et en utilisant l'exercice 19, question 4, feuille 5, montrer que
$$\widehat{I_{a,\varepsilon}}(\xi) = \frac{2^n\, \pi^{(n-1)/2}\, \Gamma((n+1)/2)}{C_n\,\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{a-n} \frac{|y| + \varepsilon}{((|y|+\varepsilon)^2 + |\xi|^2)^{(n+1)/2}}\, dy. \tag{1}$$
Au passage, donner un sens à (1) du point de vue de l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
4. En faisant $\varepsilon \to 0$ dans (1), montrer que
$$\widehat{I_a}(\xi) = \frac{2^n\, \pi^{(n-1)/2}\, \Gamma((n+1)/2)}{C_n\,\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{a-n+1} \frac{1}{(|y|^2 + |\xi|^2)^{(n+1)/2}}\, dy. \tag{2}$$
On justifiera le passage à la limite, en se plaçant dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
5. En utilisant dans (2) le changement de variable $y = |\xi|\, z$ et les questions 1 et 2 de l'exercice précédent, montrer que
$$\widehat{I_a}(\xi) = C_{a,n} \frac{1}{|\xi|^{n-a}},$$
avec $C_{a,n}$ une constante que l'on déterminera en fonction de la fonction $\Gamma$.

**Exercice # 11. (Principe d'incertitude de Heisenberg)** Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

1. Montrer que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right) \geq 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{Re}\, \left(\overline{f}(x) f'(x)\right)\, dx\right)^2.$$
2. En déduire que
$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right) \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\right)^2.$$

3. Déduire de ce qui précède une minoration de

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x-\overline{x})^2 |f(x)|^2\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (\xi-\overline{\xi})^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)$$

pour $\overline{x}, \overline{\xi} \in \mathbb{R}$.

4. On suppose que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = 1$. Montrer que la quantité ci-dessus est minimale lorsque

$$\overline{x} = \int_{\mathbb{R}} x|f(x)|^2\,dx \text{ et } \overline{\xi} = \int_{\mathbb{R}} \xi|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi.$$

5. Calculer

$$\inf\left(\int_{\mathbb{R}} (x-\overline{x})^2 |f(x)|^2\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (\xi-\overline{\xi})^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)$$

lorque $\overline{x}$ et $\overline{\xi}$ sont choisis comme dans la question précédente et que $f$ décrit l'ensemble des fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = 1$.
Indication : on pourra étudier le cas où $f$ est une gaussienne.