Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^{e} année
Année 2024–2025

Contrôle en TD # 1
Le 14 février 2025 – durée 30 minutes

Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.

Exercice # 1.

1. Si $f, g : X \to \mathbb{R}$, rappeler la définition de $f \sim g$.
2. Soient $f_1, f_2, g_1, g_2 : X \to \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Si $f_1 \sim f_2$ et $g_1 \sim g_2$, montrer que $f_1 + tg_1 \sim f_2 + tg_2$.

Exercice # 2. Supposons $\mu(X) < \infty$.

1. Soient $1 \leq p < r \leq \infty$ et $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que $\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/r}\|f\|_r$.
2. En déduire que $\mathscr{L}^\infty \subset \mathscr{L}^r \subset \mathscr{L}^p \subset \mathscr{L}^1$.

Exercice # 3. Rappelons que, pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$,

$$\|(a_n)_{n\geq 0}\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^p\right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{n\geq 0} |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases},$$

et que $\ell^p := \{(a_n)_{n\geq 0} \,;\, \|(a_n)_{n\geq 0}\|_p < \infty\}$.

Montrer que si $1 \leq p < r \leq \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^r \subset \ell^\infty$.