Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3e année
Année 2023–2024

Contrôle continu # 1
– Éléments de correction –

Dans les exercices, on pensera à considérer séparément, si nécessaire, les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.

Exercice # 1. (3 p.) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Pour quelles valeurs de α avons-nous $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$?

Solution. Si $1 \leq p < \infty$, $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^p \iff \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^{\alpha p}} < \infty \iff \alpha > \frac{1}{p}$, la dernière équivalence découlant du critère de Riemann.

Si $p = \infty$, $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty \iff \displaystyle\sup_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)^\alpha} < \infty \iff \alpha \geq 0$. (Si $\alpha \geq 0$, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est bornée, car ses termes sont compris entre 0 et 1. Si $\alpha < 0$, elle n'est pas bornée, car sa limite est ∞.) $\square$

Exercice # 2. (3 p.) Nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Soient $1 \leq p, r \leq \infty$. Si $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ et $f_n \to g$ dans $\mathscr{L}^r$, quelle est la relation entre f et g ?

Solution. Comme $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$, il existe une sous-suite (f_{n_k}) et un ensemble négligeable $A \in \mathscr{T}$ tels que $f_{n_k}(x) \to f(x)$, $\forall\, x \notin A$. Comme $f_{n_k} \to g$ dans $\mathscr{L}^r$, il existe une sous-suite $(f_{n_{k_\ell}})$ et un ensemble négligeable $B \in \mathscr{T}$ tels que $f_{n_{k_\ell}}(x) \to g(x), \forall\, x \notin B$. On obtient que $f_{n_{k_\ell}}(x) \to f(x)$ et $f_{n_{k_\ell}}(x) \to g(x)$, $\forall\, x \notin A \cup B$, d'où $f(x) = g(x)$, $\forall\, x \notin A \cup B$, d'où $f = g$ p. p. $\square$

Exercice # 3. (4 p.) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.

(a) Si $f, f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, rappeler le sens de la notation $f \sim f_1$.

(b) Soient $f, f_1, g, g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ boréliennes telles que $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$h, h_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ h(y) = f(x-y)g(y),\ h_1(y) = f_1(x-y)g_1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que $h \sim h_1$ et en déduire que $f * g(x) = f_1 * g_1(x)$ au sens du théorème du changement de variables.

Solution. a) $f = f_1$ λ_n-p. p. (ou ν_n-p. p. s'il s'agit de fonctions boréliennes).
b) Soient $A, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ négligeables tels que $f(x) = f_1(x)$ si $x \notin A$, respectivement $g(x) = g_1(x)$ si $x \notin B$.

Nous avons $h(y) = h_1(y)$ si $x - y \notin A$ et $y \notin B$, donc si $y \notin (x - A) \cup B$. La mesure de Lebesgue étant invariante par isométries (affines), nous avons $\nu_n(x - A) = \nu_n(A) = 0$, et donc $h = h_1$ ν_n-p. p.

Il s'ensuit que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} h_1(y)\, dy$ au sens du théorème du changement de variables, d'où $f * g(x) = f_1 * g_1(x)$ au même sens. $\square$

Exercice # 4. (6 p.) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$. Soient : (i) $1 \leq p \leq \infty$; (ii) $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$; (iii) $g(x) = e^{-2|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{-2|x|}\, dx \leq (1 - 1/p)^{1-1/p} \|f\|_p$.

(b) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + (1/p)^{1/p}$.

(c) $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p$.

Solution. Si $1 \leq q < \infty$, nous avons

$$\|g\|_q^q = \int_{\mathbb{R}} e^{-2q|x|}\,dx = \int_0^\infty e^{-2qx}\,dx + \int_{-\infty}^0 e^{2qx}\,dx = \frac{1}{2q} + \frac{1}{2q} = \frac{1}{q},$$

d'où $\|g\|_q = (1/q)^{1/q}$.

Si $q = \infty$, g étant continue sur $\mathbb{R}$, nous avons $\|q\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |g(x)| = g(0) = 1$.

Ainsi, avec la convention $0^0 = 1$, nous avons

$$\|g\|_q = (1/q)^{1/q},\ \forall\, 1 \leq q \leq \infty. \tag{1}$$

(a) suit de (1) avec q le conjugué de p (de sorte que $1/q = 1 - 1/p$) et l'inégalité de Hölder ; (b) suit de (1) avec $q = p$ et l'inégalité de Minkowski ; (c) suit de (1) avec $q = 1$ et l'inégalité de Young (avec $r = p$). □

Exercice # 5. (4 p.) Nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que $\mathscr{L}^p$ est un espace vectoriel. La démonstration ne doit pas utiliser l'inégalité de Minkowski (dont la preuve repose sur le résultat demandé).

Solution. Si f est mesurable et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors clairement $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$. En particulier, $f \in \mathscr{L}^p \implies \lambda f \in \mathscr{L}^p$.

Si $p = 1$, l'inégalité triangulaire $|f + g| \leq |f| + |g|$ montre que, si f, g sont mesurables, alors $\displaystyle\int |f+g| \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g|$. En particulier, si $f, g \in \mathscr{L}^1$, alors la dernière somme est finie, et donc $f + g \in \mathscr{L}^1$.

Si $1 < p < \infty$, la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi(t) = |t|^p$ est convexe. (En effet, sa dérivée est $\Phi'(t) = p|t|^{p-1} \operatorname{sgn} t$, qui est croissante.) L'inégalité de Jensen donne $\Phi((f+g)/2) \leq (\Phi(f) + \Phi(g))/2$, d'où, si f, g sont mesurables,

$$\frac{1}{2^p} \int |f+g|^p = \int \Phi((f+g)/2) \leq \int (\Phi(f) + \Phi(g))/2 = \frac{1}{2} \int |f|^p + \frac{1}{2} \int |g|^p.$$

En particulier, si $f, g \in \mathscr{L}^p$, alors la dernière somme est finie, et donc $f + g \in \mathscr{L}^p$. □