Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle | Année 2023–2024

Contrôle continu # 1
Le 16 février 2024 – durée 60 minutes

Dans les exercices, on pensera à considérer séparément, si nécessaire, les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.

Exercice # 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Pour quelles valeurs de α avons-nous $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$?

Exercice # 2. Nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Soient $1 \leq p, r \leq \infty$. Si $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ et $f_n \to g$ dans $\mathscr{L}^r$, quelle est la relation entre f et g ?

Exercice # 3. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.

(a) Si $f, f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, rappeler le sens de la notation $f \sim f_1$.

(b) Soient $f, f_1, g, g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ boréliennes telles que $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$h, h_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ h(y) = f(x-y)g(y),\ h_1(y) = f_1(x-y)g_1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que $h \sim h_1$ et en déduire que $f * g(x) = f_1 * g_1(x)$ au sens du théorème du changement de variables.

Exercice # 4. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$. Soient : (i) $1 \leq p \leq \infty$; (ii) $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$; (iii) $g(x) = e^{-2|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Montrer que :

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)| e^{-2|x|}\, dx \leq (1 - 1/p)^{1-1/p} \|f\|_p$.

(b) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + (1/p)^{1/p}$.

(c) $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p$.

Exercice # 5. Nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que $\mathscr{L}^p$ est un espace vectoriel. La démonstration ne doit pas utiliser l'inégalité de Minkowski (dont la preuve repose sur le résultat demandé).