Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2024–2025

Contrôle continu # 1
Le 28 février 2025 – durée 60 minutes
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice # 1. (3 p.) Nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que $\mathscr{L}^p$ est un espace vectoriel. La démonstration ne doit pas utiliser l'inégalité de Minkowski (dont la preuve repose sur le résultat demandé).

Exercice # 2. (7 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes positives.

(a) Montrer que la fonction $f * g$ est borélienne.

(b) Soit $1 < p < \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^1$, montrer que $f * g \in \mathscr{L}^p$.

Exercice # 3. (7 p.) Soit $f \in C_c^\infty(]0, \infty[; [0, \infty[)$. Soit $F(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt, \forall\, x \geq 0$. Soit $1 < p < \infty$.

Rappelons l'inégalité de Hardy

$$\int_0^\infty \frac{[F(x)]^p}{x^p}\, dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty [f(x)]^p\, dx, \tag{1}$$

qui peut être montrée par une intégration par parties.

En s'inspirant éventuellement de la preuve de (1), montrer le résultat suivant (avec f, F et p comme ci-dessus). Soit $\alpha > 1$. Alors

$$\int_0^\infty \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha}\, dx \leq \left(\frac{p}{\alpha-1}\right)^p \int_0^\infty \frac{[f(x)]^p}{x^{\alpha-p}}\, dx.$$

On pourra se servir de l'identité suivante : $\alpha - 1 = \alpha\dfrac{p-1}{p} + \dfrac{\alpha-p}{p}$.

Exercice # 4. (4 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := e^{-|x|}, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f * g$ est continue. On pourra utiliser un théorème de cours ou un exercice de TD sur les produits de convolution, dont la conclusion est la continuité de $f * g$.

Exercice # 5. (4 p.) Nous travaillons dans un espace probabilisé $(X, \mathscr{T}, \mu)$. (Donc $\mu(X) = 1$.) Existe-t-il une fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$ telle que :

(a) $\|f\|_1 = 2$ et $\|f\|_2 = 1$?

(b) $\|f\|_1 = 1$ et $\|f\|_2 = 1$?

(c) (Question plus difficile) $\|f\|_1 = 1$, $\|f\|_2 = 2$ et $\|f\|_\infty = 3$?

On pourra utiliser librement les inégalités vues en TD concernant les normes $\| \ \|_p$ dans un espace probabilisé.