Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^{e} année
Année 2024–2025

Contrôle en TD # 2
Le 28 mars 2025 – durée 30 minutes

Soit H un espace de Hilbert réel, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme induite par le produit scalaire, notée $\|\cdot\|$.

1. Soit $(e_j)_{j\geq 1} \subset H$ une suite orthonormée. Soit $(a_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence :

$$\sum_{j\geq 1} a_j e_j \text{ converge} \Longleftrightarrow \sum_{j\geq 1} a_j^2 < +\infty.$$

2. Montrer que pour, tout $x \in H$,

$$\|x\| = \max \left\{ \langle x, y \rangle ; y \in H,\ \|y\| \leq 1 \right\}.$$

3. Déterminer la projection orthogonale sur la boule unité fermée de H.