Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^{e} année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2023–2024

Contrôle continu # 2
– Éléments de correction –

Exercice # 1. (4 p.) Soit H un espace de Hilbert réel, séparable, de dimension infinie et de base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$. Montrer l'*égalité de Parseval*

$$\|x\|^2 = \sum_{n\geq 1} \langle x, e_n\rangle^2,\ \forall\, x \in H.$$

Solution. Par définition d'une base hilbertienne, la suite $(e_n)_{n\geq 1}$ est orthonormée et, pour tout $x \in H$, nous avons

$$x = \sum_{n\geq 1} \langle x, e_n\rangle e_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{1\leq n\leq N} \langle x, e_n\rangle e_n. \tag{1}$$

Par ailleurs, la famille $(e_n)_{1\leq n\leq N}$ étant orthonormée, le théorème de Pythagore donne

$$\left\| \sum_{1\leq n\leq N} \lambda_n e_n \right\|^2 = \sum_{1\leq n\leq N} (\lambda_n)^2,\ \forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

En utilisant (1), la continuité de $H \ni x \mapsto \|x\|$, et (2), nous obtenons

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \left\| \lim_{N\to\infty} \sum_{1\leq n\leq N} \langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2 = \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{1\leq n\leq N} \langle x, e_n\rangle e_n \right\|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{1\leq n\leq N} \langle x, e_n\rangle^2 \\ &= \sum_{n\geq 1} \langle x, e_n\rangle^2.\end{aligned}$$

□

Exercice # 2. Soit H un espace de Hilbert réel. Soit F une partie non-vide de H. Montrer que :

a) **(4 p.)** $F^\perp$ est un sous-espace fermé de H.

b) **(5 p.)** $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$.

c) **(2 p.)** $(F^\perp)^\perp = \overline{\text{Vect}\,(F)}$.

Solution. a) Soient $x_1, x_2 \in F^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité du produit scalaire par rapport à sa première variable, nous avons

$$\langle x_1 + \lambda x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \lambda\langle x_2, y\rangle = 0,\ \forall\, y \in F,$$

d'où $x_1 + \lambda x_2 \in F^\perp$ et $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de H.

Par ailleurs, soient $(x_n) \subset F^\perp$ et $x \in H$ tels que $x_n \to x$. En utilisant la continuité du produit scalaire par rapport à sa première variable, nous avons

$$\langle x, y\rangle = \langle \lim_n x_n, y\rangle = \lim_n \langle x_n, y\rangle = 0,\ \forall\, y \in F.$$

Il s'ensuit que $x \in F^\perp$, et donc $F^\perp$ est fermé.

b) Clairement, si $\emptyset \neq A \subset B \subset H$, alors $B^\perp \subset A^\perp$. En utilisant cette observation avec $A = F$ et $B = \overline{\text{Vect}\,(F)}$, nous obtenons $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp \subset F^\perp$.

Pour l'inclusion opposée, soit $x \in F^\perp$. Montrons dans un premier temps que $x \in [\text{Vect}\,(F)]^\perp$. En effet, si $y \in \text{Vect}\,(F)$, il existe : un entier N, des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ et des vecteurs $y_1, \ldots, y_N \in F$ tels que $y = \sum_{1\le n\le N} \lambda_n y_n$. La linéarité du produit scalaire par rapport à sa deuxième variable donne

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \sum_{1\le n\le N} \lambda_n y_n\rangle = \sum_{1\le n\le N} \lambda_n \langle x, y_n\rangle = 0.$$

Il s'ensuit que $x \in \text{Vect}\,(F)^\perp$.

Montrons maintenant que $x \in \overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp$. Si $y \in \overline{\text{Vect}\,(F)}$, il existe une suite $(y_n)_{n\ge1} \subset \text{Vect}\,(F)$ telle que $y_n \to y$. La continuité du produit scalaire par rapport à sa deuxième variable et le fait que $x \in [\text{Vect}\,(F)]^\perp$ donnent

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lim_n y_n\rangle = \lim_n \langle x, y_n\rangle = 0,$$

d'où la conclusion.

c) Nous utilisons le fait que, si $G \subset H$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors $(G^\perp)^\perp = G$. Rappelons également que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de H est encore un sous-espace vectoriel de H. En appliquant cette égalité à $G = \overline{\text{Vect}\,(F)}$ et en utilisant la question b), nous obtenons

$$(F^\perp)^\perp = (\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp)^\perp = \overline{\text{Vect}\,(F)}. \qquad \square$$

Exercice # 3. (5 p.) Soit

$$\varphi : \ell^2 \to \mathbb{R},\ \varphi((a_n)_{n\ge0}) = \sum_{n\ge0} \frac{a_n}{n+1},\ \forall\, (a_n)_{n\ge0} \in \ell^2.$$

Montrer que la série définissant $\varphi((a_n)_{n\ge0})$ est convergente, et que φ est une application linéaire et continue sur ℓ^2.

Solution. Dans ce qui suit, nous identifions une suite $(a_n)_{n\ge0}$ à la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$, $\forall\, n$.

Rappelons que $\ell^2 = \mathscr{L}^2(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, où μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$. Avec l'identification ci-dessus, nous avons $(a_n)_{n\ge0} \in \ell^2 \iff f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, et par ailleurs $\|(a_n)_{n\ge0}\|_{\ell^2} = \|f\|_2$.

Le critère de Riemann montre que la suite $(1/(n+1))_{n\ge0}$ appartient à ℓ^2. Soit $g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$ la fonction associée à cette suite. Ainsi, la suite $(a_n/(n+1))_{n\ge0}$ s'identifie à la fonction fg.

L'inégalité de Hölder donne $fg \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$. En se rappelant le lien entre série et intégrale pour les fonctions de $\mathscr{L}^1(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}), \mu)$, et la définition du produit scalaire dans $\mathscr{L}^2$, nous obtenons que φ est bien définie et

$$\varphi((a_n)_{n\ge0}) = \int_{\mathbb{N}} fg\, d\mu = \langle f, g\rangle. \tag{3}$$

L'identité (3), la linéarité de l'identification $(a_n)_{n\ge0} \mapsto f$ et la linéarité du produit scalaire par rapport à sa première variable impliquent la linéarité de φ.

Par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|\varphi((a_n)_{n\ge0})| = |\langle f, g\rangle| \le \|f\|_2 \|g\|_2 = \|g\|_2 \|(a_n)_{n\ge0}\|_{\ell^2}, \tag{4}$$

d'où la continuité de φ comme application linéaire sur ℓ^2.

(De manière alternative, à partir de la preuve de la validité de (3), on peut invoquer le théorème de Riesz, qui affirme que toute fonctionnelle de la forme (3) est linéaire et continue.) $\square$