Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^e année
Année 2024–2025

Contrôle continu # 2
– Éléments de correction –

Exercice # 1. (4 p.) Soient H un espace de Hilbert réel et F une partie non-vide de H. Montrer que $F^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(F)}^\perp$.

Solution. Il est immédiat que, si $A \subset B \subset H$, alors $B^\perp \subset A^\perp$. Comme $F \subset \mathrm{Vect}(F) \subset \overline{\mathrm{Vect}(F)}$, il s'ensuit que

$$\overline{\mathrm{Vect}(F)}^\perp \subset [\mathrm{Vect}(F)]^\perp \subset F^\perp. \tag{1}$$

Montrons que les inclusions inverses dans (1) sont encore vraies, ce qui permettra de conclure.

Étape 1. $F^\perp \subset [\mathrm{Vect}(F)]^\perp$. Soit $x \in F^\perp$. Soit $y \in \mathrm{Vect}(F)$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $f_1, \ldots, f_n \in F$ tels que $y = \sum_{j=1}^n \lambda_j f_j$. Par linéarité du produit scalaire et le fait que $\langle x, f_j \rangle = 0, \forall\, j$ (car $x \in F^\perp$ et $f_j \in F$), nous avons

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle x, f_j \rangle = 0.$$

$y \in \mathrm{Vect}(F)$ étant arbitraire, il s'ensuit que $x \in [\mathrm{Vect}(F)]^\perp$.

Étape 2. $[\mathrm{Vect}(F)]^\perp \subset \overline{\mathrm{Vect}(F)}^\perp$. Soit $x \in [\mathrm{Vect}(F)]^\perp$. Soit $y \in \overline{\mathrm{Vect}(F)}$. Soit $(y_n) \subset \mathrm{Vect}(F)$ telle que $y_n \to y$. Par continuité du produit scalaire et le fait que $\langle x, y_n \rangle = 0, \forall\, n$ (car $x \in [\mathrm{Vect}(F)]^\perp$ et $y_n \in \mathrm{Vect}(F)$), nous avons $\langle x, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n \rangle = 0$.

$y \in \overline{\mathrm{Vect}(F)}$ étant arbitraire, il s'ensuit que $x \in \overline{\mathrm{Vect}(F)}^\perp$. □

Exercice # 2. (7 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$), muni de la norme euclidienne usuelle

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)^{1/2}, \ \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Soit

$$C := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n \leq 0\}.$$

a) Montrer que C est convexe, fermé, non-vide.

b) Dessiner C si $n = 2$.

c) Si $n = 2$ et $x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, trouver graphiquement $p_C(x)$.

d) Montrer que, pour $n \geq 2$ arbitraire,

$$p_C(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0), \ \forall\, x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus C.$$

Solution. a) La fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) := x_n$, est continue. Comme $C = f^{-1}(]-\infty, 0])$, C est fermé. C est non-vide, car $0 \in C$. Enfin, si $x, y \in C$ et $t \in [0, 1]$, nous avons

$$f((1-t)x + ty) = \underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \times \underbrace{x_n}_{\leq 0} + \underbrace{t}_{\geq 0} \times \underbrace{y_n}_{\leq 0} \leq 0,$$

et donc $(1-t)x+ty \in C$. Il s'ensuit que C est convexe.
d) Soit $y := (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$. Clairement, $y \in C$. Pour conclure, nous devons montrer que

$$\langle x-y, z-y\rangle \leq 0,\ \forall\, z \in C. \tag{2}$$

Or, si $z = (z_1, \ldots, z_n) \in C$, alors

$$\langle x-y, z-y\rangle = \underbrace{x_n}_{>0,\ \text{car}\ x\notin C} \times \underbrace{z_n}_{\leq 0,\ \text{car}\ z\in C} \leq 0,$$

d'où (2) et la conclusion. □

Exercice # 3. (7 p.) Nous travaillons dans $]0, \infty[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit

$$\varphi : L^2 \to \mathbb{R},\ \varphi(f) := \int_0^\infty e^{-x/2} f(x)\, dx,\ \forall\, f \in L^2.$$

a) Montrer que φ est linéaire et continue, et calculer sa norme.
b) Soit $F := \operatorname{Ker}(\varphi)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de L^2.
c) Trouver $F^\perp$.
d) Si $f \in L^2$, déterminer $g := p_F(f)$.

Solution. a) Soit $a :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $a(x) := e^{-x/2}$. Alors a est borélienne, et

$$\int_0^\infty a^2(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 < \infty.$$

En observant que $\varphi(f) = \langle f, a\rangle$, nous obtenons, *via* la partie facile du théorème de Riesz, que φ est linéaire, continue, et de norme $\|a\|_2 = 1$.
b) F est sous-espace vectoriel de L^2, comme noyau d'une application linéaire. Il est fermé, car $F = \varphi^{-1}(\{0\})$ et φ est continue.
c) Posons $G := \overline{\operatorname{Vect}(\{a\})} = \operatorname{Vect}(\{a\})$, la deuxième égalité se justifiant par le fait qu'un sous-espace de dimension finie est fermé. Nous avons $F = \{a\}^\perp$ et donc, du premier exercice, $F = G^\perp$. G étant un sous-espace vectoriel fermé de H, nous avons $F^\perp = G^{\perp\perp} = G$, la deuxième égalité étant un résultat de cours.
d) $\{a\}$ étant une base orthonormée de $G = F^\perp$, nous avons

$$p_{F^\perp}(f) = p_G(f) = \langle f, a\rangle\, a = \varphi(f)\, a.$$

Il s'ensuit que $g = p_F(f) = f - p_{F^\perp}(f) = f - \varphi(f)\, a$. □

Exercice # 4. (2 p.) Soit H un espace de Hilbert réel séparable, de dimension infinie et de base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$. La série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} e_n$$

est-elle convergente ? Pour justifier la réponse, on pourra utiliser sans preuve un résultat de cours ou TD concernant les séries $\sum a_n e_n$.

Solution. D'après un résultat vu en TD, si $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ est une suite orthonormée et $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$, alors

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n\, e_n \text{converge} \Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} (\alpha_n)^2 < \infty.$$

Dans notre cas, $\alpha_n = 1/\sqrt{n}$, $\sum_{n\geq 1} (\alpha_n)^2 = \sum_{n\geq 1} 1/n = \infty$, et donc la série ne converge pas. □