Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^e année
Année 2022–2023

Contrôle continu # 2
Le 31 mars 2023 – durée 60 minutes

Exercice # 1. Soit H un espace de Hilbert réel. Soit $(e_j)_{j\geq 1} \subset H$ une suite orthonormée. Soit $(a_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\sum_{j\geq 1} a_j e_j \text{ converge } \iff \sum_{j\geq 1} a_j^2 < \infty. \tag{1}$$

En cas de convergence de l'une des séries apparaissant dans (1), montrer que

$$\left\| \sum_{j\geq 1} a_j e_j \right\|^2 = \sum_{j\geq 1} a_j^2.$$

Exercice # 2. Soit H un espace de Hilbert réel. Soit F une partie non-vide de H. Montrer que :

a) $F^\perp$ est un sous-espace fermé de H.

b) $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$.

c) $F^{\perp\perp} = \overline{\text{Vect}\,(F)}$.

Exercice # 3. Soient $H = L^2(\mathbb{R})$ muni de sa norme usuelle et

$$V = \left\{ f \in H\,;\, \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-|x|}\, dx = 0 \right\}.$$

a) Montrer que V est un sous-espace fermé de H.

b) Déterminer une base de $V^\perp$.