Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^{e} année
Année 2024–2025

Contrôle continu # 2
Le 4 avril 2025 – durée 60 minutes

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice # 1. (4 p.) Soient H un espace de Hilbert réel et F une partie non-vide de H. Montrer que $F^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(F)}^\perp$.

Exercice # 2. (7 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ (avec $n \geq 2$), muni de la norme euclidienne usuelle

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2}, \ \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Soit

$$C \coloneqq \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ ; \ x_n \leq 0\}.$$

a) Montrer que C est convexe, fermé, non-vide.
b) Dessiner C si $n = 2$.
c) Si $n = 2$ et $x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, trouver graphiquement $p_C(x)$.
d) Montrer que, pour $n \geq 2$ arbitraire,

$$p_C(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0), \ \forall\, x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus C.$$

Exercice # 3. (8 p.) Nous travaillons dans $]0, \infty[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit

$$\varphi : L^2 \to \mathbb{R}, \ \varphi(f) \coloneqq \int_0^\infty e^{-x/2} f(x)\, dx, \ \forall\, f \in L^2.$$

a) Montrer que φ est linéaire et continue, et calculer sa norme.
b) Soit $F \coloneqq \mathrm{Ker}(\varphi)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de L^2.
c) Trouver $F^\perp$.
d) Si $f \in L^2$, déterminer $g \coloneqq p_F(f)$.

Exercice # 4. (2 p.) Soit H un espace de Hilbert réel séparable, de dimension infinie et de base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 1}$. La série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} e_n$$

est-elle convergente ? Pour justifier la réponse, on pourra utiliser sans preuve un résultat de cours ou TD concernant les séries $\sum a_n e_n$.