

Contrôle partiel
Le 20 mars 2026 – durée 90 minutes
Le barème est donné à titre indicatif

Exercice # 1. (3 p.) Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, $1 \leq p \leq \infty$, et $g_n : X \rightarrow [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, des fonctions mesurables positives. Soit $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \in [0, \infty]$, $\forall x \in X$. Nous supposons que

$$g_n \in \mathcal{L}^p, \forall n, \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_p < \infty.$$

Montrer que $g \in \mathcal{L}^p$ et que $\sum_{n=0}^N g_n \rightarrow g$ dans $\mathcal{L}^p$ quand $N \rightarrow \infty$.

Exercice # 2. (3 p.) Nous travaillons dans l'espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Si $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in \mathcal{L}^p$, $g \geq 0$, montrer que l'ensemble

$$F := \{f \in \mathcal{L}^p; 0 \leq f \leq g \text{ } \mu - \text{p.p.}\}$$

est fermé dans $\mathcal{L}^p$.

Exercice # 3. (2 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne standard $|\cdot|$. Soit ρ un noyau régularisant standard. Si $0 < \varepsilon < 1$, montrer que

$$\chi_{B(0,1)} * \rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 - \varepsilon \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 + \varepsilon \end{cases}.$$

(Ici, $B(0, 1)$ désigne la boule unité pour la norme $|\cdot|$.)

Exercice # 4. (3 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soient $f \in \mathcal{L}^2$ et $g(x) := e^{-|x|}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne standard). Montrer que $f * g$ est continue et que $f * g \in \mathcal{L}^3$.

Exercice # 5. (2 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{N}^*$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et de la mesure

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} n.$$

Nous admettons que μ est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$. Nous admettons également que, par rapport à cette mesure,

$$\|(a_n)_{n \geq 1}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^p \right)^{1/p}, \quad \forall 1 \leq p < \infty.$$

Montrer que, si $1 \leq p < r < \infty$, nous avons $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{L}^p \implies (a_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{L}^r$.

Exercice # 6. (7 p.) Nous travaillons dans $]0, \infty[$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit

$$f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \frac{1 - \cos x}{x^a}, \quad \forall x > 0,$$

avec $a \in \mathbb{R}$ paramètre. Si $1 \leq p < \infty$, montrer que

$$f \in \mathcal{L}^p \iff \frac{1}{p} < a < 2 + \frac{1}{p}.$$

(Indications. Étudier $\int_0^\pi |f(x)|^p dx$ et $\int_\pi^\infty |f(x)|^p dx$. L'équivalence $1 - \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}$ pourrait être utile.)