Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^{e} année
Année 2023–2024

Contrôle terminal
– Éléments de correction –

Exercice # 1. (4 p.) Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit

$$\varphi((a_n)_{n\geq 0}) := \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}. \tag{1}$$

a) Si $1 \leq p < \infty$ et $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^p$, montrer que la série qui apparaît dans (1) est convergente.

b) Si $1 \leq p < \infty$, montrer que φ est une application linéaire et continue sur ℓ^p.

c) Les résultats précédents restent-ils vrais si $p = \infty$?

Solution. a), b) L'idée sous-jacente est l'utilisation de l'inégalité de Hölder. Nous identifions la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ à une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, et la suite $(1/(n+1))_{n\geq 0}$ à une fonction $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Soit q le conjugué de p. L'argument-clé consiste à montrer que

$$(1/(n+1))_{n\geq 0} \in \ell^q, \text{ ou encore } \|g\|_q < \infty. \tag{2}$$

Preuve de (2) *si* $1 < p < \infty$. Dans ce cas, nous avons $1 < q < \infty$. Le critère de Riemann montre que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{|(n+1)|^q}$ converge, d'où (2).

Preuve de (2) *si* $p = 1$. Cette fois-ci, nous avons $q = \infty$, et $\|g\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |1/(n+1)| = 1 < \infty$.

Fin de la preuve. En utilisant : (i) l'inégalité de Hölder $\ell^p - \ell^q$; (ii) le lien entre série et intégrale pour les séries absolument convergentes ; (iii) la définition de la norme $\| \ \|_p$, nous obtenons que la série de (1) converge, et, de plus (avec μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$),

$$fg \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}, \mu), \tag{3}$$

$$\varphi((a_n)_{n\geq 0}) = \int_{\mathbb{N}} fg \, d\mu \tag{4}$$

$$|\varphi((a_n)_{n\geq 0})| \leq \|g\|_q \|f\|_p = \|g\|_q \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^p \right)^{1/p}. \tag{5}$$

De : (i) (3)–(5) ; (ii) la linéarité de l'intégrale des fonctions intégrables, on obtient que φ est linéaire et continue, de norme $\leq \|g\|_q$.

c) Prenons $a_n = 1, \forall\, n \geq 0$. Alors $(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^\infty$, mais la série de (1) vaut $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} = \infty$. Les résultats précédents ne sont donc plus valides si $p = \infty$. $\square$

Exercice # 2. (7 p.) Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $1 < p < \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^p(I)$. Soit

$$F(x) := \int_0^x f(t)\, dt, \ \forall\, x > 0.$$

a) Montrer que F est bien définie.
Nous admettons par la suite que F est continue.

b) Soit $\alpha := \dfrac{p-1}{p^2}$. En utilisant l'inégalité de Hölder, trouver des constantes explicites $C < \infty$ et $a \in \mathbb{R}$ telles que

$$|F(x)| \leq Cx^a \left(\int_0^x t^{\alpha p}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \ \forall\, x > 0. \tag{6}$$

c) En déduire l'*inégalité de Hardy*

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p\,dx. \tag{7}$$

Solution. a) La mesure de Lebesgue du borélien $]0,x[$ étant finie, nous avons

$$f \in \mathscr{L}^p(I) \implies f_{|]0,x[} \in \mathscr{L}^p(]0,x[) \implies f_{|]0,x[} \in \mathscr{L}^1(]0,x[) \implies F(x) \text{ bien définie.}$$

Par la suite, nous allons utiliser les deux identités suivantes :

$$\int_0^x t^b\,dt = \frac{1}{b+1}t^{b+1}\Big|_{t=0}^{x} = \frac{1}{b+1}x^{b+1},\ \forall\, b > -1,\ \forall\, x > 0, \tag{8}$$

$$\int_t^\infty x^c\,dx = \frac{1}{c+1}x^{c+1}\Big|_{x=t}^{\infty} = -\frac{1}{c+1}t^{c+1},\ \forall\, c < -1,\ \forall\, t > 0. \tag{9}$$

b) Soit $q = p/(p-1)$ le conjugué de p. En utilisant : (i) l'inégalité de Hölder ; (ii) (8) avec $b = -\alpha q = -1/p > -1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
|F(x)| = \left|\int_0^x t^\alpha f(t) t^{-\alpha}\,dt\right| &\leq \left(\int_0^x t^{\alpha p}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_0^x t^{-\alpha q}\,dt\right)^{1/q} \\
&= \left(\int_0^x t^{\alpha p}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\frac{1}{1-1/p}x^{1-1/p}\right)^{1/q} \\
&= Cx^a \left(\int_0^x t^{\alpha p}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p},
\end{aligned} \tag{10}$$

avec

$$C = \left(\frac{1}{1-1/p}\right)^{1/q} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{(p-1)/p},\ a = \left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{q} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^2 = 1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}. \tag{11}$$

c) En utilisant : (i) (10) ; (ii) le théorème de Tonelli ; (iii) (9) avec $c = ap - p = -2 + 1/p < -1$; (iv) (11), nous obtenons (en notant que $c + 1 = ap - p + 1 = -1 + 1/p$)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\,dx &\leq C^p \int_0^\infty x^{ap-p} \int_0^x t^{\alpha p}|f(t)|^p\,dt dx = \int_0^\infty t^{\alpha p}|f(t)|^p \int_t^\infty x^{-2+1/p}\,dx dt \\
&= -\,C^p \int_0^\infty t^{\alpha p}|f(t)|^p \frac{1}{-1+1/p}t^{-1+1/p}\,dt = C^p\frac{p}{p-1}\int_0^\infty t^{\alpha p - 1 + 1/p}|f(t)|^p\,dt,
\end{aligned}$$

qui est l'inégalité souhaitée car, en utilisant (11) et la définition de α, nous avons

$$C^p\frac{p}{p-1} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \text{ et } \alpha p - 1 + \frac{1}{p} = 0.$$

□

Exercice # 3. (4 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$. Soit

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{1+(x-y)^2}\,dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que F est bien définie (en tout point $x \in \mathbb{R}$) et bornée.

Solution. Nous reconnaissons la formule $F = f * g$, où $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Clairement, g est continue, donc borélienne. Les conclusions suivent alors du théorème de Young, à condition de montrer que

$$g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}), \text{ avec } q \text{ le conjugué de } p. \tag{12}$$

Preuve de (12) *si* $1 \le q < \infty$. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^q(x)\, dx \le \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = \arctan x\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = \pi < \infty.$$

Preuve de (12) *si* $q = \infty$. Nous avons

$$\|g\|_\infty \le \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| = 1 < \infty.$$ □

Exercice # 4. (4 p.) Soit H un espace de Hilbert réel, de norme $\|\ \|$ et de produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Soit $a \in H$ tel que $\|a\| = 1$. Soit $C := \{x \in H\ ;\ \langle x, a\rangle \le 0\}$.

a) Montrer que C est un ensemble convexe, fermé et non-vide.

b) Si $x \in H \setminus C$, montrer que $p_C(x) = x - \langle x, a\rangle a$.

Solution. a) Clairement, $0 \in C$ (d'où C est non-vide), et C est fermé comme image réciproque de $]-\infty, 0]$ par la fonction continue $x \mapsto \langle x, a\rangle$. Par ailleurs, si $x, y \in C$ et $t \in [0, 1]$, nous avons

$$\langle (1-t)x + ty, a\rangle = \underbrace{(1-t)}_{\ge 0}\underbrace{\langle x, a\rangle}_{\le 0} + \underbrace{t}_{\ge 0}\underbrace{\langle y, a\rangle}_{\le 0} \le 0,$$

d'où $(1-t)x + ty \in C$ et donc C convexe.

b) Soit $x \in H \setminus C$ (donc nous avons $\langle x, a\rangle > 0$). Soit $y = x - \langle x, a\rangle a$. D'après la caractérisation de la projection sur un convexe fermé, nous devons montrer que $y \in C$ et que

$$\langle x - y, z - y\rangle \le 0, \forall\, z \in C. \tag{13}$$

Preuve de $y \in C$. Nous avons $\langle y, a\rangle = \langle x, a\rangle - \langle x, a\rangle \underbrace{\langle a, a\rangle}_{=\|a\|^2=1} = 0$, d'où la conclusion.

Preuve de (13). Soit $z \in C$. Nous avons

$$\begin{aligned}\langle x - y, z - y\rangle =& \langle \langle x, a\rangle a, z - x + \langle x, a\rangle a\rangle\\ =& \langle x, a\rangle\langle a, z\rangle - \cancel{\langle x, a\rangle\langle a, x\rangle} + \cancel{\langle x, a\rangle\langle x, a\rangle}\underbrace{\langle a, a\rangle}_{=1} = \underbrace{\langle x, a\rangle}_{>0}\underbrace{\langle a, z\rangle}_{\le 0} \le 0.\end{aligned}$$ □

Exercice # 5. (6 p.) Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = f(2\pi)$.

a) Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, calculer $c_n(f)$ en fonction de $c_n(f')$.

b) En utilisant l'égalité de Parseval pour f', en déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n(f)|^2 < \infty. \tag{14}$$

c) En déduire que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| < \infty. \tag{15}$$

d) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ vers f. (Ici, $e_n(x) := e^{\imath nx}$, $\forall\, x \in [0, 2\pi], \forall\, n \in \mathbb{Z}$.)

Solution. a) Nous avons, en utilisant : (i) le caractère C^1 de f ; (ii) une intégration par parties ; (iii) l'hypothèse $f(0) = f(2\pi)$:

$$\begin{aligned} c_n(f') =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\imath nx} f'(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\big[e^{-\imath nx} f(x)\big]_{x=0}^{x=2\pi} + \frac{\imath n}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\imath nx} f(x)\, dx \\ =& (f(2\pi) - f(0)) + \imath n\, c_n(f) = \imath n\, c_n(f), \end{aligned} \tag{16}$$

d'où en particulier

$$c_n(f) = \frac{1}{\imath n} c_n(f'),\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{17}$$

b) En utilisant : (i) (16) ; (ii) l'égalité de Parseval pour $f' \in C([0, 2\pi]) \subset \mathscr{L}^2([0, 2\pi])$, nous obtenons

$$\sum n^2 |c_n(f)|^2 = \sum |c_n(f')|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt < \infty.$$

c) Nous avons, en utilisant : (i) l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; (ii) le critère de Riemann pour la série $\displaystyle\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}$; (iii) la question b),

$$\begin{aligned} \sum |c_n(f)| =& |c_0(f)| + \sum_{n\neq 0} |c_n(f)| = |c_0(f)| + \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} n |c_n(f)| \\ \leq& |c_0(f)| + \underbrace{\left(\sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}}_{<\infty \text{ (Riemann)}} \underbrace{\left(\sum_{n\neq 0} n^2 |c_n(f)|^2\right)^{1/2}}_{<\infty \text{ (de b))}} < \infty. \end{aligned}$$

d) Nous avons $\|c_n(f)e_n\|_\infty = |c_n(f)|$. En utilisant cette égalité et la question c), nous obtenons que la série $\sum c_n(f)e_n$ est normalement convergente (et donc en particulier simplement convergente) vers une limite que nous notons h. Il reste à vérifier que, sur $[0, 2\pi]$, nous avons $h = f$. Notons g le prolongement par 2π-périodicité de f. Les hypothèses $f \in C^1([0, 2\pi])$ et $f(0) = f(2\pi)$ nous assurent que g est de classe C^1 par morceaux, et continue. En utilisant : (i) le fait que, si une suite de nombres complexes converge vers une limite ℓ, alors toute sous-suite converge vers ℓ ; (ii) le caractère continu et C^1 par morceaux de g ; (iii) le théorème de Dirichlet appliqué à g, nous obtenons, pour tout $x \in [0, 2\pi]$:

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e_n(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n(x) = g(x) = f(x). \qquad \square$$