

Contrôle terminal
–Éléments de correction–

Questions de cours. (4 p.)

- a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique. Indiquer une condition sur f , aussi faible que possible, permettant de définir $c_n(f)$ et $S_n(f)(x)$, quantités dont on rappellera la définition.
- b) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec les trois propriétés suivantes : (i) f est continue ; (ii) f est 2π -périodique ; (iii) f admet, en tout point $x \in \mathbb{R}$, des dérivées latérales.
1. Montrer que f satisfait, en tout point $x \in \mathbb{R}$, le critère de Dini.
 2. Quelle conséquence a ce fait sur le comportement de la suite $(S_n(f)(x))_{n \geq 0}$?

Solution. a) Si $f \in \mathcal{L}^1([0, 2\pi[)$, alors nous pouvons définir $c_n(f)$ et $S_n(f)(x)$, par les formules

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} dy, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \text{ et } S_n(f)(x) := \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

b) 1. Prenons $f(x \pm) := f(x)$. Nous avons, pour $0 < y < \pi$,

$$|f(x \pm) - f(x \pm y)| \leq yG(y), \text{ avec } G(y) := \frac{|f(x) - f(x+y)|}{y} + \frac{|f(x) - f(x-y)|}{y}.$$

Clairement, G est continue sur $]0, \pi]$. Par ailleurs, sa limite en 0 est $|f'(x+)| + |f'(x-)|$, qui est finie. Il s'ensuit que G est bornée sur $]0, \pi]$, donc intégrable sur $]0, \pi]$. Le critère de Dini est donc satisfait.

2. D'après le théorème sur le critère de Dini, nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = f(x)$. $\square$

Exercice # 1. (3 p.) Soit $\alpha > 1$ un paramètre. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π -périodique et paire définie par

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{1 + |\ln x|^\alpha}, & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f satisfait le critère de Dini en $x = 0$.

Solution. En prenant $f(0 \pm) = 0$, nous avons, pour $0 < y \leq \pi$,

$$|f(0 \pm) - f(0 \pm y)| \leq yG(y), \text{ avec } G(y) := \frac{1}{y(1 + |\ln y|^\alpha)}.$$

G est continue, positive, et nous avons $G(y) \sim_{0+} H(y) := \frac{1}{y |\ln y|^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$, le critère de Bertrand donne $\int_0^{1/2} H(y) dy < \infty$. Le théorème des équivalents montre que l'intégrale (de Lebesgue ou généralisée) $\int_0^1 G(y) dy$ converge, et donc $G \in \mathcal{L}^1([0, \pi])$. Le critère de Dini est donc satisfait. $\square$

Exercice # 2. (1 p.) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction avec les trois propriétés suivantes : (i) f est 2π -périodique ; (ii) sur $]0, 2\pi[$, $f \in \mathcal{L}^1$; (iii) il existe deux constantes $0 < C < \infty$ et $1 < \alpha < \infty$ telles que

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha}, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{inx}$ converge uniformément.

Solution. Nous avons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \|c_n(f)e^{in\cdot}\|_{\infty} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{\alpha}} < \infty,$$

la dernière inégalité découlant du critère de Riemann. Il s'ensuit que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)e^{in\cdot}$ est normalement convergente, et en particulier uniformément convergente. $\square$

Exercice #3. (4 p.) Rappelons que, si $x \in \mathbb{R}$, x^+ est la partie positive de x , définie par

$$x^+ := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Nous travaillons dans $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Soit

$$C := \{(a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2; a_n \geq 0, \forall n \geq 0\}.$$

a) Montrer que C est convexe, fermé, non-vidé.

b) Si $x = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$, montrer que $p_C(x) = y$, où $y := ((a_n)^+)_{n \geq 0}$.

Solution. a) Les applications $\varphi_j : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_j((a_n)_{n \geq 0}) := a_j$, $j \geq 0$, sont linéaires et de norme ≤ 1 , donc continues. Comme $C = \bigcap_{j \geq 0} (\varphi_j)^{-1}([0, \infty[)$, C est fermé.

C est non-vidé car $0 \in C$.

C est convexe : si $x = (a_n)_{n \geq 0}$, $z = (b_n)_{n \geq 0} \in C$ et $0 \leq t \leq 1$, alors $(1-t)x + tz \in C$, car

$$\underbrace{(1-t)}_{\geq 0} \underbrace{a_n}_{\geq 0} + \underbrace{t}_{\geq 0} \underbrace{b_n}_{\geq 0} \geq 0, \forall n \geq 0.$$

b) Soient x, y comme dans l'énoncé. Posons $c_n := (a_n)^+$. Comme $|c_n| \leq |a_n|$, $\forall n \geq 0$, nous avons $\sum_{n \geq 0} (c_n)^2 \leq \sum_{n \geq 0} (a_n)^2$, et donc $x \in \ell^2 \Rightarrow y \in \ell^2$. Par ailleurs il est clair que, si $x \in \ell^2$, alors $y \in C$. Il reste à montrer l'inégalité $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0$, $\forall z = (b_n)_{n \geq 0} \in C$. Or, comme $(a_n - c_n)c_n = 0$, $\forall n$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle x - y, z - y \rangle &= \langle (a_n - c_n)_{n \geq 0}, (b_n - c_n)_{n \geq 0} \rangle = \sum_{n \geq 0} (a_n - c_n)(b_n - c_n) \\ &= \sum_{n \geq 0} \underbrace{(a_n - c_n)}_{\leq 0} \underbrace{(b_n - c_n)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

$\square$

Exercice #4. (3 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue.

Rappelons que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \forall a > 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x^2/2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Sans calculer explicitement $f * f$, montrer que $f * f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, $\forall 1 \leq p \leq \infty$.

b) Calculer explicitement $f * f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solution. a) D'après l'inégalité de Young, il suffit de montrer que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. Montrons que $f \in \mathcal{L}^t(\mathbb{R})$, $\forall 1 \leq t \leq \infty$. Si $t = \infty$, ceci découle de $|f(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Si $1 \leq t < \infty$, ceci suit de

$$\|f\|_t^t = \int_{\mathbb{R}} e^{-tx^2/2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} < \infty.$$

b) Nous avons

$$\begin{aligned} f * f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/2} e^{-y^2/2} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2+xy-x^2/4} e^{-x^2/4} dy \\ &= e^{-x^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-(y-x/2)^2} dy \underset{\text{c. v. } y=z+x/2}{=} e^{-x^2/4} \int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}. \end{aligned}$$

□

Exercice # 5. (3 p.) Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $g \in \mathcal{L}^q(X)$.

Nous rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \forall a, b \geq 0, \quad (1)$$

qu'il n'est pas demandé de montrer.

a) Si $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$, montrer, en utilisant (1) avec $a := |f(x)|$ et $b := |g(x)|$, l'inégalité de Hölder

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (2)$$

b) Montrer (2) pour tout f et g (sans supposer $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$).

Solution. a) Nous avons

$$|f(x)| \times |g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q, \forall x \in X, \quad (3)$$

et les deux membres de (3) sont mesurables et positifs. En intégrant par rapport à x , nous obtenons

$$\|fg\|_1 \leq \frac{1}{p} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \|g\|_q^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

b) Si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ p. p., d'où $fg = 0$ p. p., et l'inégalité à montrer est claire. De même si $\|g\|_q = 0$. Il reste à étudier le cas où $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$. Soient $F := \frac{1}{\|f\|_p} f$, $G := \frac{1}{\|g\|_q} g$, de sorte que $\|F\|_p = 1$ et $\|G\|_q = 1$. La question précédente donne

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \|fg\|_1 = \|FG\|_1 \leq \|F\|_p \|G\|_q = 1,$$

d'où (2). □

Exercice # 6. (6 p.) Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soient : (i) $1 < p < \infty$ et q le conjugué de p ; (ii) $1 < \alpha < \infty$; (iii) $f \in C_c^\infty([0, \infty[; [0, \infty[)$. Soient

$$F(x) := \int_0^x f(t) dt, \forall x > 0,$$

et

$$\beta := \frac{(p-1)(p-\alpha+1)}{p^2} = \frac{p-\alpha+1}{pq}.$$

a) En utilisant l'inégalité de Hölder, trouver des constantes explicites $0 < C < \infty$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ telles que

$$[F(x)]^p \leq C x^\gamma \int_0^x t^{\beta p} [f(t)]^p dt, \quad \forall x > 0.$$

b) En déduire l'inégalité

$$\int_0^\infty \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha} dx \leq D \int_0^\infty \frac{[f(x)]^p}{x^{\alpha-p}} dx,$$

avec $0 < D < \infty$ une constante dont on donnera l'expression en fonction de p et α .

Solution. a) En utilisant d'abord l'inégalité de Hölder, ensuite le fait que

$$\beta q = \frac{p - \alpha + 1}{p} = 1 - \frac{\alpha - 1}{p} < 1$$

(car $\alpha > 1$) et en posant

$$\gamma := (p - 1)(1 - \beta q) = \frac{(p - 1)(\alpha - 1)}{p} = \frac{\alpha - 1}{q},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} [F(x)]^p &= \left[\int_0^x t^\beta f(t) t^{-\beta} dt \right]^p \leq \int_0^x t^{\beta p} [f(t)]^p dt \left(\int_0^x t^{-\beta q} dt \right)^{p/q} \\ &= \int_0^x t^{\beta p} [f(t)]^p dt \left(\int_0^x t^{-\beta q} dt \right)^{p-1} = \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \beta q} \right)^{p-1}}_C x^\gamma \int_0^x t^{\beta p} [f(t)]^p dt. \end{aligned}$$

b) En divisant l'inégalité ci-dessus par x^α , en intégrant, en utilisant le fait que les intégrandes sont continues et positives, en utilisant le théorème de Tonelli et le fait que

$$\gamma - \alpha + 1 = \frac{\alpha - 1}{q} - (\alpha - 1) = (\alpha - 1) \left(\frac{1}{q} - 1 \right) = -\frac{\alpha - 1}{p} < 0,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha} dx &\leq C \int_0^\infty x^{\gamma - \alpha} \int_0^x t^{\beta p} [f(t)]^p dt = C \int_0^\infty t^{\beta p} [f(t)]^p \int_t^\infty x^{\gamma - \alpha} dx dt \\ &= \underbrace{-\frac{C}{\gamma - \alpha + 1}}_D \int_0^\infty t^{\beta p + \gamma - \alpha + 1} [f(t)]^p dt. \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité de l'énoncé en notant que, de ce qui précède,

$$\begin{aligned} D &= \frac{p}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{1 - \beta q} \right)^{p-1} = \frac{p}{\alpha - 1} \left(\frac{(p - 1)q}{\alpha - 1} \right)^{p-1} = \left(\frac{p}{\alpha - 1} \right)^p, \\ \beta p + \gamma - \alpha + 1 &= \frac{p - \alpha + 1}{q} - \frac{\alpha - 1}{p} = \frac{(p - 1)(p - \alpha + 1)}{p} - \frac{\alpha - 1}{p} = p - \alpha. \end{aligned}$$

□