Université Claude Bernard Lyon 1
UE Éléments d'analyse fonctionnelle

Licence de mathématiques 3^e année
Année 2022–2023

Contrôle terminal
Le 26 mai 2023 – durée 90 minutes

Exercice # 1. Montrer que $\ell^2 \subset \ell^3$ et que $\|x\|_3 \leq \|x\|_2, \forall\, x \in \ell^2$.

Exercice # 2. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace probabilisé. (Donc $\mu(X) = 1$.) Montrer que, pour toute fonction mesurable $f : X \to \mathbb{R}$, nous avons $\|f\|_1 \leq \|f\|_2$.

Exercice # 3. Soit $H = L^2(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ (les fonctions sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}$). On considère l'ensemble $C = \{f \in H\,;\ f \geq 0 \text{ p. p.}\}$.

a) Montrer que C est un convexe fermé.

b) Montrer que, si $f \in H$, alors $P_C(f) = f\chi_{\{f\geq 0\}}$, où $\{f \geq 0\} = \{x \in X\,;\ f(x) \geq 0\}$.

Exercice # 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et telle que $f(x) = \pi - x$ sur $]0, \pi]$. En utilisant la série de Fourier de f, calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$.

Exercice # 5. Nous travaillons dans $]0, \infty[$ et dans $]0, \infty[^2$, chacun muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soient $f, g :]0, \infty[\to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes et positives.

Nous admettons les identités suivantes :

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+y)\sqrt{y}}\, dy = \int_0^\infty \frac{\sqrt{y}}{(x+y)\sqrt{x}}\, dx = \pi,\ \forall\, x > 0. \tag{1}$$

En utilisant : (i) l'identité

$$\frac{f(x)g(y)}{x+y} = \frac{f(x)\,\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x+y}\,\sqrt[4]{y}} \times \frac{g(y)\,\sqrt[4]{y}}{\sqrt{x+y}\,\sqrt[4]{x}},\ \forall\, x, y > 0\,;$$

(ii) l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $]0, \infty[^2$; (iii) le théorème de Tonelli; (iv) l'identité (1), montrer l'*inégalité de Hilbert-Schur*

$$\int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\, dxdy \leq \pi\|f\|_2\|g\|_2. \tag{2}$$

Bonus. Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. En utilisant les identités

$$\int_0^\infty \frac{x^{1/q}}{(x+y)\,y^{1/q}}\, dy = \int_0^\infty \frac{y^{1/p}}{(x+y)\,x^{1/p}}\, dx = \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}, \forall\, x > 0,$$
$$\frac{f(x)g(y)}{x+y} = \frac{f(x)\,x^{1/(pq)}}{(x+y)^{1/p}\,y^{1/(pq)}} \times \frac{g(y)\,y^{1/(pq)}}{(x+y)^{1/q}\,x^{1/(pq)}},\ \forall\, x, y > 0,$$

l'inégalité de Hölder avec exposants p et q et le théorème de Tonelli, établir l'*inégalité de Hardy-Riesz*

$$\int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\, dxdy \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\|f\|_p\|g\|_q. \tag{3}$$