Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2024–2025

Contrôle terminal
Le 16 mai 2025 – durée 90 minutes
Le barème est donné à titre indicatif

Questions de cours. (4 p.)

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique. Indiquer une condition sur f, aussi faible que possible, permettant de définir $c_n(f)$ et $S_n(f)(x)$, quantités dont on rappellera la définition.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction avec les trois propriétés suivantes : (i) f est continue ; (ii) f est 2π-périodique ; (iii) f admet, en tout point $x \in \mathbb{R}$, des dérivées latérales.

1. Montrer que f satisfait, en tout point $x \in \mathbb{R}$, le critère de Dini.
2. Quelle conséquence a ce fait sur le comportement de la suite $(S_n(f)(x))_{n\geq 0}$?

Exercice # 1. (3 p.) Soit $\alpha > 1$ un paramètre. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et paire définie par

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{1+|\ln x|^\alpha}, & \text{si } 0 < x \leq \pi \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f satisfait le critère de Dini en $x = 0$.

Exercice # 2. (1 p.) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction avec les trois propriétés suivantes : (i) f est 2π-périodique ; (ii) sur $]0, 2\pi[$, $f \in \mathscr{L}^1$; (iii) il existe deux constantes $0 < C < \infty$ et $1 < \alpha < \infty$ telles que

$$|c_n(f)| \leq \frac{C}{|n|^\alpha},\ \forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{\imath n \cdot}$ converge uniformément.

Exercice # 3. (4 p.) Rappelons que, si $x \in \mathbb{R}$, x^+ est la partie positive de x, définie par

$$x^+ := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Nous travaillons dans $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$. Soit

$$C := \{(a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2 \,;\, a_n \geq 0,\ \forall\, n \geq 0\}.$$

a) Montrer que C est convexe, fermé, non-vide.

b) Si $x = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$, montrer que $p_C(x) = y$, où $y := ((a_n)^+)_{n\geq 0}$.

Exercice # 4. (3 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue.

Rappelons que

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}},\ \forall\, a > 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-x^2/2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Sans calculer explicitement $f * f$, montrer que $f * f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$.

b) Calculer explicitement $f * f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercice # 5. (3 p.) Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soient $f \in \mathscr{L}^p(X)$ et $g \in \mathscr{L}^q(X)$.

Nous rappelons l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \ \forall\, a, b \geq 0, \tag{1}$$

qu'il n'est pas demandé de montrer.

a) Si $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$, montrer, en utilisant (1), avec $a := |f(x)|$ et $b := |g(x)|$, l'inégalité de Hölder

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{2}$$

b) Montrer (2) pour tout f et g (sans supposer $\|f\|_p = 1$ et $\|g\|_q = 1$).

Exercice # 6. (6 p.) Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soient : (i) $1 < p < \infty$ et q le conjugué de p ; (ii) $1 < \alpha < \infty$; (iii) $f \in C_c^\infty(]0, \infty[; [0, \infty[)$. Soient

$$F(x) := \int_0^x f(t)\, dt, \ \forall\, x > 0,$$

et

$$\beta := \frac{(p-1)(p-\alpha+1)}{p^2} = \frac{p-\alpha+1}{pq}.$$

a) En utilisant l'inégalité de Hölder, trouver des constantes explicites $0 < C < \infty$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ telles que

$$[F(x)]^p \leq C x^\gamma \int_0^x t^{\beta p} [f(t)]^p\, dt, \ \forall\, x > 0.$$

b) En déduire l'inégalité

$$\int_0^\infty \frac{[F(x)]^p}{x^\alpha}\, dx \leq D \int_0^\infty \frac{[f(x)]^p}{x^{\alpha - p}}\, dx,$$

avec $0 < D < \infty$ une constante dont on donnera l'expression en fonction de p et α.