Université Claude Bernard Lyon 1 | Master Mathématiques générales 1$^{\text{ère}}$ année
UE Équations aux dérivées partielles | Année 2023–2024

Devoir maison # 1
À rendre le 22 mars 2024. Compte pour 15 % de la note finale

Sujet # 1. (Équation de Schrödinger) On considère le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} Su(x,t) := \imath\partial_t u(x,t) + \Delta_x u(x,t) = 0 & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}. \tag{S}$$

La fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est donnée et on cherche $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

(a) *Préliminaire.* Dans cette question, on cherche à obtenir formellement la solution du problème (S). Supposons u solution. En supposant tous les calculs licites, déterminer l'équation satisfaite par $v(\xi,t) = \mathscr{F}_x u(\cdot,t)(\xi)$ (à t fixé, $\xi \mapsto v(\xi,t)$ est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto u(x,t)$). Résoudre cette dernière équation, puis donner l'expression de u.

(b) *Groupe de Schrödinger.* On pose, pour $t \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi_t(x) := \frac{1}{(\sqrt{4\pi\imath t})^n} e^{\frac{\imath|x|^2}{4t}},$$

avec la convention $\sqrt{\imath} = e^{\imath\pi/4}$. Φ_t est le noyau de Schrödinger.
Pour $t \neq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on pose $S(t)g = \Phi_t * g$. Pour $t = 0$, on définit $S(0)g = g$. Ainsi, on a une application

$$\mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}^n) \ni (t,g) \mapsto S(t)g \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

(i) On pose, pour $t \neq 0$, $g^t(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi\imath t})^n} e^{\frac{\imath|x|^2}{4t}} g(x)$. Montrer que, pour $t \neq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $S(t)g(x) = e^{\frac{\imath|x|^2}{4t}} \widehat{g^t}\left(\dfrac{x}{2t}\right)$.

(ii) Montrer que $\|S(t)g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, g \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$.

(iii) En déduire que $S(t)$ s'étend de manière unique comme isométrie linéaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pour $\varepsilon > 0$ et $t \neq 0$, on pose $\Phi_{\varepsilon,t}(x) := \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi(\varepsilon + \imath t)})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4(\imath t + \varepsilon)}}$.

(iv) Pour $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, calculer $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g}$. Montrer que $\Phi_{\varepsilon,t} * g \to S(t)g$ simplement quand $\varepsilon \to 0+$.

(v) En déduire l'égalité (au sens de $L^2(\mathbb{R}^n)$) suivante : $\widehat{S(t)g}(\xi) = e^{-\imath t|\xi|^2}\hat{g}(\xi)$, $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(vi) Montrer que $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, s,t \in \mathbb{R}$, au sens où $S(t+s)g = S(t)S(s)g$, $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(vii) En déduire que $S(t)$ est unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathbb{R} \ni t \mapsto S(t)$ est un isomorphisme de groupes.

Cette propriété fait de $S(t)$ un groupe : c'est le groupe de Schrödinger.

(viii) Montrer que, pour $t \neq 0$, $S(t)$ est continu de $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de norme $\leq (4\pi|t|)^{-n/2}$.

(c) *Solution de l'équation de Schrödinger*. On se donne $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on pose $u(t, \cdot) = S(t)g, \forall\, t \in \mathbb{R}$.

(i) Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

(ii) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. On pose $\psi(\xi, t) := \mathscr{F}_x \varphi(\cdot, t)(\xi)$. Montrer que u est solution faible de (S) si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{-\imath t|\xi|^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi(-\xi, t) - \imath |\xi|^2 \psi(-\xi, t) \right) = 0,\ \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}).$$

(iii) En déduire que, si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors u est solution de (S) au sens suivant :
— u est solution faible de (S) ;
— $\lim_{t \to 0} \|u(\cdot, t) - g\|_{L^2} = 0$.

(iv) Montrer que $t \mapsto u(\cdot, t) \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$.

Sujet # 2. (Équation des ondes) Résoudre le problème de Cauchy pour l'équation des ondes

$$\begin{cases} \square\, u(x,t) := \partial_t^2 u(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0 & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} . \tag{W}$$

Les fonctions $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont données et on cherche $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Références suggérées : L.C. Evans, Partial Differential Equations [1, Section 2.4.1], P. Mironescu, Introduction aux équations aux dérivées partielles [2, Chapitre 4].

(a) Établir les formules de résolution.

(b) En déduire l'unicité de la solution.

(c) Si f et g sont de régularité suffisante, vérifier que la fonction u ainsi trouvée est bien solution classique de (W).

Références

[1] L.C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[2] P. Mironescu. Introduction aux équations aux dérivées partielles. `http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/resources/edp_notes_cours_2022-2023.pdf`, 2023.