Feuille de TD # 1
NORMES, ESPACES DE BANACH

Exercice # 1. (L'inégalité de Hölder vue comme une inégalité de convexité) Soit $1 < p < \infty$ et soit q le conjugué de p. On considère l'inégalité

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q\right)^{1/q}, \ \forall\, a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

1. Ramener la preuve de (1) au cas particulier $a_j \in]0, \infty[, \forall\, j$, $b_j \in \mathbb{R}, \forall\, j$, $\sum_{j=1}^{n} (a_j)^p = 1$.
2. Dans ce cas particulier, obtenir (1) *via* l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction $\Phi(t) = |t|^q, \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Exercice # 2. (Autour de l'inégalité de Minkowski) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $1 \leq p < \infty$.

$\boxed{\text{A}}$ Soit $\Phi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante telle que $\Phi(0) = 0$.
Pour $f : X \to \mathbb{C}$ mesurable, soit

$$\|f\| := \inf\left\{\lambda > 0\,;\ \int_X \Phi(|f|/\lambda)\, d\mu \leq 1\right\}$$

(avec la convention $\inf \emptyset = \infty$).

1. Montrer que $\| \ \|$ vérifie l'inégalité triangulaire.
2. Retrouver l'inégalité de Minkowski dans $(\mathbb{C}^n, \| \ \|_p)$, ℓ^p et $L^p(X)$.
3. S'il existe une constante finie C telle que $\Phi(2t) \leq C\Phi(t), \forall\, t \geq 0$, montrer que
$$0 < \|f\| < \infty \implies \int_X \Phi\left(\frac{|f|}{\|f\|}\right) d\mu = 1.$$
4. Si, de plus, Φ est strictement convexe, strictement croissante , caractériser les fonctions mesurables $f, g : X \to \mathbb{R}$ telles que
$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\| < \infty.$$
5. Obtenir le cas d'égalité dans l'inégalité de Minkowski dans $L^p(X)$.

$\boxed{\text{B}}$ Soit q le conjugué de p.

1. Montrer que
$$\|f\|_p = \sup\left\{\int_X fh\, d\mu\,;\ h \in L^q(X),\ \|h\|_q \leq 1\right\}, \forall\, f \in L^p(X).$$

2. Interpréter ce résultat en terme de norme de forme linéaire.
3. Retrouver encore une fois l'inégalité de Minkowski.

Exercice # 3. (Espace de Banach de fonctions lipschitziennes)

1. Soit (X, d) un espace métrique non-vide. On fixe un point $x_0 \in X$.
   Soit
   $$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)}\,;\, x, y \in X,\, x \neq y\right\} \in [0, \infty],\ \forall\, f : X \to \mathbb{R}.$$
   Soit
   $$\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{R}) := \{f : X \to \mathbb{R}\,;\, f(x_0) = 0 \text{ et } \|f\|_{\mathrm{Lip}} < \infty\}.$$
   Montrer que $(\mathrm{Lip}_0(X, \mathbb{R}), \|\ \|_{\mathrm{Lip}})$ est un espace de Banach.
2. Plus généralement, soit (Y, N) un espace vectoriel normé.
   Soit
   $$\|f\|_{\mathrm{Lip}} := \sup\left\{\frac{N(f(x) - f(y))}{d(x, y)}\,;\, x, y \in X,\, x \neq y\right\} \in [0, \infty],\ \forall\, f : X \to Y.$$
   Soit
   $$\mathrm{Lip}_0(X, Y) := \{f : X \to Y\,;\, f(x_0) = 0 \text{ et } \|f\|_{\mathrm{Lip}} < \infty\}.$$
   Si Y est un espace de Banach, montrer que $(\mathrm{Lip}_0(X, Y), \|\ \|_{\mathrm{Lip}})$ est un espace de Banach.
3. Si X et Y sont des espaces vectoriels normés munis des distances induites par les normes respectives et $x_0 = 0$, montrer que $\mathscr{L}(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $\mathrm{Lip}_0(X, Y)$.

Exercice # 4. (Un cas de non densité de C^1) Avec les notations de l'exercice précédent, soient $X = [-1, 1]$ et $x_0 = 0$. Soit

$$C^1_0([-1, 1], \mathbb{R}) := \{f \in C^1([-1, 1]; \mathbb{R})\,;\, f(0) = 0\}.$$

Montrer que $C^1_0([-1, 1], \mathbb{R})$ n'est pas dense dans $\mathrm{Lip}_0([-1, 1], \mathbb{R})$. Plus spécifiquement, montrer que $[-1, 1] \ni x \mapsto f(x) := |x|$ satisfait $\|f - g\|_{\mathrm{Lip}} \geq 1$, $\forall\, g \in C^1_0([-1, 1], \mathbb{R})$.

Exercice # 5. (Norme à poids) Soit $\alpha : [0, 1] \to [0, 1]$. Soit $E := C([0, 1], \mathbb{R})$. On définit

$$\|f\| := \sup_{x \in [0,1]} \alpha(x)\, |f(x)|,\ \forall\, f \in E,\ \text{et l'ensemble } B := \{x \in [0, 1]\,;\, \alpha(x) > 0\}.$$

Montrer que $\|\ \|$ est une norme si et seulement $\overline{B} = [0, 1]$.

Exercice # 6. (Espace de Banach de fonctions holomorphes) On travaille avec la mesure de Lebesgue sur le disque unité $\mathbb{D}$ de $\mathbb{C}$. Pour $1 \leq p \leq \infty$, soit

$$\mathscr{A}_p := \mathrm{Hol}\,(\mathbb{D}) \cap \mathscr{L}^p(\mathbb{D}),$$

muni de la norme $\|\ \|_p$.

1. Soient K un compact de $\mathbb{D}$ et R tel que

$$\rho := \max\{|z|;\ z \in K\} < R < 1.$$

Montrer que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{[2\pi(1-R)]^{1/p}(R-\rho)}\|f\|_p,\ \forall\, z \in K,\ \forall\, f \in \mathscr{A}_p.$$

2. En déduire que $\mathscr{A}_p$ est un espace de Banach.

Exercice # 7. (Fonctions qui s'annulent à l'infini) Soit (X, d) un espace métrique *σ-compact*. (C'est-à-dire, il existe une suite (K_j) de compacts de X tels que $\cup_j K_j = X$. Exemples importants : $\mathbb{R}^n$ ou un ouvert de $\mathbb{R}^n$.) Soit

$$C_0(X) := \{f \in C(X, \mathbb{C})\,;\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, j \text{ tel que } |f(x)| < \varepsilon \text{ si } x \notin K_j\},$$

muni de la norme $\|\ \|_\infty$. (Notons que la définition dépend, *a priori*, du choix de la suite (K_j).)

1. Montrer que

$$C_0(\mathbb{R}^n) \subseteq \{f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})\,;\ \lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0\},$$

avec égalité si la suite (K_j) est croissante et $\cup_j \overset{\circ}{K}_j = \mathbb{R}^n$.

2. Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$C_0(\Omega) \subseteq \{f \in C(\Omega, \mathbb{C})\,;\ \lim_{d(x,\partial\Omega)\to 0} f(x) = 0\},$$

avec égalité si la suite (K_j) est croissante et $\cup_j \overset{\circ}{K}_j = \Omega$.

3. Montrer que $C_0(X)$ est un espace de Banach.

Exercice # 8. (Un espace de Banach ne peut avoir une base dénombrable) Le but de cet exercice est de montrer que, si $(E, \|\ \|)$ est un espace de Banach, alors E ne peut avoir une base *algébrique* dénombrable. (Rappel : un ensemble est *dénombrable* s'il est en correspondance bijective avec $\mathbb{N}^*$.) Preuve par l'absurde : supposons que E a une base algébrique $\{e_n\}_{n\geq 1}$, c'est-à-dire que tout élément x de E s'écrit exactement d'une façon sous la forme $x = \sum_{n\geq 1} x_k e_k$, avec un nombre fini de scalaires x_k non-nuls.

En utilisant cette hypothèse, nous allons construire une suite de Cauchy de E qui ne converge pas ; la contradiction obtenue va achever la preuve.

1. Posons $E_n := \text{Vect}\,\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\forall\, n \geq 1$. En utilisant le lemme de Riesz, construire une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ telle que
   (a) $f_n \in E_n$, $\forall\, n \geq 1$.
   (b) $\|f_n\| = 1$, $\forall\, n \geq 1$.
   (c) $\|f_{n+1} - y\| \geq 1$, $\forall\, n \geq 1$, $\forall\, y \in E_n$.
   (d) $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de E_n, $\forall\, n \geq 1$.

(e) $\{f_n\}_{n\geq 1}$ est une base de E.

2. On pose $x_n := \sum_{1\leq k\leq n} 3^{-k} f_k, \forall\, n\geq 1$. Montrer que $(x_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy.
3. Soient $m\geq 1$ et $y\in E_m$. Montrer que $\|x_n - y\| \geq \dfrac{1}{2\cdot 3^{m+1}}, \forall\, n\geq m+1$.
4. Conclure.

Exercice # 9. (Isométries)

$\boxed{\text{A}}$ Dans cette partie, on travaille dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne et du produit scalaire standard.

1. Soit $f(x) := Ax + b$, où A est une matrice orthogonale et $b\in\mathbb{R}^n$. Montrer que f est une isométrie, c'est-à-dire $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \forall\; x, y\in\mathbb{R}^n$.
2. On se propose d'établir la réciproque du résultat ci-dessus.
   (a) Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ une isométrie telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle, \forall\; x, y\in\mathbb{R}^n$.
   (b) En déduire que f envoie la base canonique $\{e_i\}$ sur une base orthonormée $\{f_i\}$.
   (c) Montrer que $f(x) = \sum\langle x, e_i\rangle f_i$. En déduire que $f(x) = Ax$, avec A orthogonale.
   (d) En déduire la réciproque de 1.

$\boxed{\text{B}}$ Dans cette partie, on travaille dans un espace normé E. Soit $f:E\to E$ une isométrie *bijective* telle que $f(0) = 0$. On se propose de montrer que f est linéaire (*théorème de Mazur-Ulam*).

1. On suppose, de plus, que (*) $f((x+y)/2) = (f(x) + f(y))/2, \forall\, x, y\in E$. Montrer que f est linéaire. Ainsi, il suffit de montrer (*).
2. Dans cette partie, nous présentons un schéma itératif permettant de définir, pour $x, y\in E$, le point milieu $(x+y)/2$ en utilisant uniquement la norme. Cette construction est inspirée par le fait que, dans un espace préhilbertien ou, plus généralement dans un espace uniformément convexe, nous avons l'équivalence
$$z = (x+y)/2 \iff \|z - x\| = \|z - y\| = \|x - y\|/2.$$
   On fixe $x, y\in E$. On définit, par récurrence,
$$H_1 := \{z\in E\,;\, \|z - x\| = \|z - y\| = \|x - y\|/2\}$$
   et, pour $n\geq 2$,
$$H_n := \{z\in H_{n-1}\,;\, \|z - t\| \leq [\text{diam}\,(H_{n-1})]/2 \text{ pour tout } t\in H_{n-1}\}.$$
   Montrer que :
   (a) diam $H_n \leq 2^{1-n}\|x - y\|$.
   (b) H_n est invariant par l'application $z\mapsto x + y - z$.
   (c) le point $(x+y)/2$ est dans tous les H_n.
   (d) $\bigcap H_n = \{(x+y)/2\}$.

3. On définit, de même, des ensembles K_n, mais à partir de $f(x)$ et $f(y)$ au lieu de x et y. Montrer que $f(H_n) = K_n$. Conclure.

Exercice # 10. (Projection sur un convexe fermé de L^p) Nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et avec $1 < p < \infty$. Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant.

Théorème. (Riesz) Soit $C \subset L^p(X)$ un convexe fermé non-vide. Alors pour toute $f \in L^p(X)$ il existe une et une seule $g \in C$ telle que

$$\|f-g\|_p \leq \|f-h\|_p, \forall\, h \in C.$$

$\boxed{\text{A}}$ Dans cette partie, on établit le résultat suivant : si $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$[f \in L^p(X), \|f\|_p = 1,\ g \in L^p(X), \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p < 2+\delta] \implies \|g\|_p < \varepsilon. \quad (2)$$

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'il existe $C_\lambda \in]0, 2]$ tel que

$$[t \in \mathbb{R},\ |t| \geq \lambda] \implies |1+t|^p + |1-t|^p - 2 \geq C_\lambda |t|^p.$$

(Indication : considérer la fonction $t \mapsto \dfrac{|1+t|^p + |1-t|^p - 2}{|t|^p}$.)

2. En déduire que

$$\int_{\{x\in X\,;\,|g(x)|\geq\lambda|f(x)|\}} (|f+g|^p + |f-g|^p - 2|f|^p) \geq C_\lambda \int_{\{x\in X\,;\,|g(x)|\geq\lambda|f(x)|\}} |g|^p.$$

3. Conclure, en choisissant convenablement λ et δ.
4. Proposer une variante de (2) lorsque l'on ne suppose plus $\|f\|_p = 1$.

$\boxed{\text{B}}$ Dans cette partie, on montre le théorème de Riesz.

1. Obtenir la conclusion si $f \in C$.
2. Si $f \notin C$, soit $(f_j) \subset C$ telle que $\|f - f_j\|_p \to d(f, C)$. Montrer que (f_j) est une suite de Cauchy. On pourra utiliser la question 4 de la partie $\boxed{\text{A}}$ et le fait que $(f_j + f_k)/2 \in C$, $\forall\, j, k$.
3. Conclure.