Feuille de TD # 2
Applications linéaires continues : norme, spectre

Tous les espaces qui apparaissent dans les énoncés sont supposés *non-triviaux* (c'est-à-dire non réduits à l'élément nul).

Exercice # 1.

1. Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) de produit scalaire $\langle\,,\rangle$ et norme $\|\ \|$, et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur *autoadjoint* et *positif*. Montrer que
$$|||T||| = \sup\{\langle Tx, x\rangle \ ; \ x \in H,\ \|x\| \le 1\}.$$

2. Montrer que
$$\|Tx\| \le |||T|||^{1/2}\langle Tx, x\rangle^{1/2},\ \forall\, x \in H.$$

Exercice # 2. Dans les questions suivantes, $T : E \to F$ est une application linéaire entre les espaces vectoriels normés (E, N_1) et (F, N_2). Déterminer si T est continue et, si tel est le cas, déterminer sa norme $|||T|||$.

1. E est un espace pré-hilbertien muni du produit scalaire $\langle\,,\rangle$ et de la norme induite $\|\ \|$, $F := \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle, $a \in E$ est fixé, $T(x) := \langle x, a\rangle$, $\forall\, x \in E$.
2. $E = F := C([0,1], \mathbb{R})$, $N_1(f) = N_2(f) := \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$, $T(f) := fg$, où $g \in E$ est fixée.
3. E, F, T comme dans la question précédente, $N_1(f) := \|f\|_2 = \left(\int_0^1 (f(x))^2\,dx\right)^{1/2}$, $N_2(f) := \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$.
4. $E = F := \mathbb{R}[X]$, $N_1\left(\sum_k a_k X^k\right) = N_2\left(\sum_k a_k X^k\right) := \sum_k |a_k|$, $T(P) := P'$.
5. $E = F := \mathbb{R}_n[X]$, $N_1\left(\sum_{0\le k\le n} a_k X^k\right) = N_2\left(\sum_{0\le k\le n} a_k X^k\right) := \sum_{0\le k\le n} |a_k|$, $T(P) := P'$.
6. $E = F := \mathbb{R}[X]$, $N_1\left(\sum_k a_k X^k\right) = N_2\left(\sum_k a_k X^k\right) := \sum_k k!\,|a_k|$, $T(P) := P'$.

Exercice # 3. Soit $1 \le p \le \infty$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\ \|_p$, et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $|||\ |||_p$ subordonnée à $\|\ \|_p$. Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Montrer que

1. $|||A|||_1 = \max_j \sum_{1 \le i \le n} |a_{ij}|$.
2. $|||A|||_\infty = \max_i \sum_{1 \le j \le n} |a_{ij}|$.
3. $|||A|||_2 = \max\{\lambda^{1/2}\,;\, \lambda \in \sigma(A^*A)\}$.
4. Si $1 < p < \infty$, alors $|||A|||_p \le |||A|||_1^{1/p} |||A|||_\infty^{1-1/p}$ (*inégalité de Schur*).

Exercice # 4. S'inspirer de la question 4 de l'exercice précédent pour montrer le résultat suivant. Soit $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit

$$(Tf)(x) := \int_0^1 K(x,y)\, f(y)\, dy,\ \forall\, x \in [0,1].$$

Pour $1 \le p \le \infty$, on munit $E := C([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_p$, où, si $1 \le p < \infty$,

$$\|f\|_p := \left(\int_0^1 |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

1. Rappeler pourquoi Tf est une fonction continue, et donc $T : E \to E$. Clairement, T est linéraire.
2. On pose

$$M_1 := \max_{y \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\, dx,\ M_\infty := \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |K(x,y)|\, dy.$$

   Montrer que $|||T||| \le M_1^{1/p}\, M_\infty^{1-1/p}$.

Exercice # 5. Avec les notations de l'exercice précédent, montrer que, si $p = 2$,

$$|||T||| \le \|K\|_2 = \left(\int_{[0,1]^2} (K(x,y))^2\, dxdy \right)^{1/2}.$$

Exercice # 6. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Le but de cet exercice est de montrer qu'une forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est continue si et seulement si Ker φ est fermé.

1. Montrer le sens direct.
2. Inversement, on suppose que Ker φ est fermé.
   (a) Montrer que $\varphi^{-1}(\{1\})$ est fermé.
   (b) Montrer qu'il existe une boule $B(0,r)$ qui n'intersecte pas $\varphi^{-1}(\{1\})$.
   (c) Montrez que, pour tout $x \in B(0,r)$, on a $|\varphi(x)| \le 1$.
   (d) Conclure.

Exercice # 7. Soit $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. On définit $Tf(0) := \pi f(0)/2$ et, pour $0 < x \leq 1$,

$$Tf(x) := \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}}\, dy.$$

Démontrer que T est un opérateur continu de $(C([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ dans lui-même. Calculer $|||T|||$.

Exercice # 8. (Matrice de Hilbert)

1. Préliminaire : soit $(a_j)_{j\geq 1}$ une suite de nombres telle que

$$(b_j)_{j\geq 1} \in \ell^2 \implies \sum_{j\geq 1} a_j b_j \text{ converge.}$$

   Montrer que $(a_j)_{j\geq 1} \in \ell^2$ et que

$$\|(a_j)_{j\geq 1}\|_2 = \max\left\{\sum_{j\geq 1} a_j b_j;\ (b_j)_{j\geq 1} \in \ell^2,\ \|(b_j)_{j\geq 1}\|_2 \leq 1\right\}.$$

   Généralisation ?

2. Montrer que

$$\sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^{1/2}}{(\lambda + k)k^{1/2}} < \pi,\ \forall\, \lambda > 0.$$

   Indication : utiliser la comparaison série-intégrale.

3. En déduire que l'opérateur

$$T : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^2(\mathbb{N}^*),\ T((a_j)_{j\geq 1}) := \left(\sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{j+k}\right)_{j\geq 1},\ \forall\, (a_j)_{j\geq 1} \in \ell^2(\mathbb{N}^*),$$

   est bien défini, continu et de norme $|||T||| \leq \pi$.

4. On considère, pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$a_j = a_j^N := \begin{cases} 1/j^{1/2}, & \text{si } 1 \leq j \leq N \\ 0, & \text{si j>N} \end{cases}.$$

   (a) Montrer que $\|(a_j)_{j\geq 1}\|_2^2 \leq 1 + \ln N$.

   (b) Montrer que, avec

$$\begin{aligned} U &:= \{(s,t) \in \mathbb{R}^2\,;\ s \geq 1,\ t \geq 1,\ 2 \leq s^2 + t^2 \leq N+1\}, \\ V &:= \{(s,t) \in \mathbb{R}^2\,;\ s \geq 0,\ t \geq 0,\ 2 \leq s^2 + t^2 \leq N+1\}, \\ W &:= ([1, N+1] \times [0,1]) \cup ([0,1] \times [1, N+1]), \end{aligned}$$

   nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j,k\geq 1} \frac{a_k a_j}{j+k} &\geq 4 \int_U \frac{1}{s^2+t^2}\, dsdt \geq 4 \int_V \frac{1}{s^2+t^2}\, dsdt - 4 \int_W \frac{1}{s^2+t^2}\, dsdt \\ &\geq 4 \int_V \frac{1}{s^2+t^2}\, dsdt - 8 \geq \pi \ln(N+1) - 8. \end{aligned}$$

(c) En déduire que $|||T||| = \pi$. On pourra partir de l'inégalité

$$|||T||| \geq \frac{\langle T(a_j)_{j\geq 1}, (a_j)_{j\geq 1}\rangle}{\|(a_j)_{j\geq 1}\|_2^2},$$

que l'on justifiera.

Exercice # 9. (Rappels sur les inverses d'opérateurs linéaires continus)

1. Soient E, F deux espaces de Banach. Si $T \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijectif, montrer que $T^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$.
2. Soit $E := \mathbb{R}[X]$, muni de $\|\sum a_j X^j\| := \sum |a_j|$. Soit $T(P)$ la primitive de P qui s'annule en 0 (on identifie fonction polynomiale et polynôme associé). Montrer que : (i) $T \in \mathscr{L}(E)$; (ii) T est bijectif ; (iii) $T^{-1} \notin \mathscr{L}(E)$.
3. Soient E un espace normé et F un espace de Banach. Montrer que $\mathscr{L}(E,F)$ muni de sa norme naturelle (laquelle ?) est un espace de Banach.
4. Soit E un espace normé. Si $A \in \mathscr{L}(E)$ et $|||A||| < 1$, montrer que $\sum_{n\geq 0} |||A^n|||$ converge.
5. Soit E un espace de Banach. Si $A \in \mathscr{L}(E)$ et $|||A||| < 1$, montrer que $I - A$ est bijectif et que $(I-A)^{-1} = \sum_{n\geq 0} A^n$.
6. Soient E un espace normé et F un espace de Banach. Soit $(T_n) \subset \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\sum |||T_n||| < \infty$. Montrer que : (i) $\sum T_n$ converge dans $\mathscr{L}(E,F)$, vers une limite notée S ; (ii) pour tout $x \in E$, $Sx = \sum T_n x$. (Donner d'abord un sens à cette égalité.)

Exercice # 10. (Spectre) Soit $(E, \|\ \|)$ un espace de Banach complexe. Si $T \in \mathscr{L}(E)$, le *spectre de* T est

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, T - \lambda I \text{ n'est pas bijectif}\}.$$

La *résolvante de* T est

$$\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, T - \lambda I \text{ est bijectif}\}.$$

1. Montrer qu'en général
$$\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\} \subsetneq \sigma(T),$$
$$\{\lambda \in \mathbb{C}\,;\, T - \lambda I \text{ n'est pas surjectif}\} \subsetneq \sigma(T).$$
2. Montrer que $\rho(T)$ est ouvert et que la fonction
$$\rho(T) \ni \lambda \mapsto f(\lambda) := (T - \lambda I)^{-1} \in \mathscr{L}(E)$$
est développable en série (avec coefficients dans $\mathscr{L}(E)$).
3. En déduire que, si $x \in E$ et $x' \in E'$, alors la fonction
$$\rho(T) \ni \lambda \mapsto f_{x,x'}(\lambda) := x'((T - \lambda I)^{-1}(x)) \in \mathbb{C}$$
est holomorphe.

4. Montrer que $\sigma(T)$ est un compact inclus dans le disque $\overline{\mathbb{D}}(0, |||T|||)$.
5. Calculer $\lim_{|\lambda|\to\infty} |f_{x,x'}(\lambda)|$.
6. En déduire que $\sigma(T) \neq \emptyset, \forall\, T \in \mathscr{L}(E)$.

Exercice # 11. On travaille dans $H := L^2([0,1], \mathbb{C})$, avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. Soit $(Tf)(x) := xf(x), \forall\, x \in [0,1], \forall\, f \in H$. Montrer que :

1. $\sigma(T) = [0,1]$.
2. T n'a pas de valeur propre.
3. $\|T\| = 1$.

Exercice # 12. Soient $(E, \|\|_E)$, respectivement un $(F, \|\|_F)$, un espace normé, respectivement un espace de Banach, et $T \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|Tx\|_F \geq C\|x\|_E, \forall\, x \in E$. Montrer que T est injectif et que $T(E)$ est fermé.

Exercice # 13. Soient H un espace de Hilbert complexe (de produit scalaire $\langle\, ,\rangle$ et norme $\|\ \|$) et $T \in \mathscr{L}(H)$ *autoadjoint*. Soient

$$a := \inf\{\langle Tx, x\rangle\,;\, x \in H,\ \|x\| = 1\} \in \mathbb{R},$$
$$b := \sup\{\langle Tx, x\rangle\,;\, x \in H,\ \|x\| = 1\} \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\sigma(T) \subset [a,b]$, et donc en particulier que $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Indications : si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, utiliser le lemme de Lax-Milgram pour montrer que $T - \lambda I$ est bijectif. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, montrer que $T - \lambda I$: est injectif et d'image fermée , et que l'orthogonal de son image est réduit à l'espace nul. (Indication : utiliser l'exercice précédent.)
2. *Bonus.* Montrer que
$$]a,b[\subset \{\langle Tx, x\rangle\,;\, x \in H,\ \|x\| = 1\}.$$
(Indication : montrer que la sphère unité est connexe.)
3. *Bonus.* Montrer que $a, b \in \sigma(T)$. (Indication : utiliser la deuxième partie du premier exercice.)

Exercice # 14. (La partie facile de la formule de Gelfand) Soient E un espace de Banach complexe et $T \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que
$$r(T) := \max\{|\lambda|\,;\, \lambda \in \sigma(T)\} \leq \limsup_{n\to\infty} |||T^n|||^{1/n}. \tag{1}$$
(En fait, dans (1) il y a égalité : c'est la *formule de Gelfand*.)
2. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty} |||T^n|||^{1/n} = \lim_{n\to\infty} |||T^n|||^{1/n} = \inf_{n\geq 1} |||T^n|||^{1/n}.$$