Feuille de TD # 3
Compacité. Connexité

Exercice # 1. Montrer que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Indication : si $\| \ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, montrer que $x \mapsto \|x\|$ est continue pour la norme $\| \ \|_1$.

Exercice # 2. Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et non-borné. Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1. f continue.
2. $f(x) > 0, \forall\, x \in F$.
3. $\displaystyle\liminf_{x \in F,\, \|x\| \to \infty} f(x) > 0$.

   Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $f(x) \geq C, \forall\, x \in F$.
   Proposer des variantes « utiles » de ce résultat.

Exercice # 3. Soit (X, d) un espace métrique. Soient K un compact de X et $(U_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de K. Montrer qu'il existe un nombre $\delta > 0$ (*constante de Lebesgue*) tel que :

$$\forall\, x \in K,\ \exists\, j = j(x) \in J \text{ tel que } B(x, \delta) \subset U_j.$$

Exercice # 4. Soient (K, d) une espace métrique compact et (Y, δ) un espace métrique. Soit $f \in C(K \times Y, \mathbb{R})$.

1. Montrer que l'application $g : Y \to C(K, \mathbb{R})$, $g(y) := f(\cdot, y), \forall\, y \in Y$, est continue.
2. Montrer que l'application $Y \ni y \mapsto \displaystyle\max_{x \in K} f(x, y)$ est continue.

Exercice # 5. Soit (K, d) un espace métrique compact. Soit $f : K \to K$ telle que

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),\ \forall\, x, y \in K \text{ tels que } x \neq y.$$

Utiliser la méthode des approximations successives pour montrer que f a (exactement) un point fixe.

Exercice # 6.

1. (*Procédé diagonal*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $(x_j^n)_{j \geq 0}$ une suite bornée de nombres réels. Montrer qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(x_{\varphi(j)}^n)_{j \geq 0}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Généralisation ?
2. (*Cas « utile » du théorème d'Alaoglu-Bourbaki*) Soit X un espace de Banach *séparable*. Soit $(f_j) \subset X'$ une suite *bornée*. Montrer qu'il existe $f \in X'$ et une sous-suite (f_{j_k}) telle que

$$f_{j_k}(x) \to f(x),\ \forall\, x \in X.$$

3. (*Cas « utile » du théorème d'Ascoli*) Soit (X, d) un espace métrique σ-compact. Soit $(f_j) \subset C(X, \mathbb{C})$ une suite de fonctions telle que :
   (a) Pour tout $x \in X$, $(f_j(x))$ est une suite (numérique) bornée.
   (b) Pour tout $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
   $$[y \in X,\, d(x,y) < \delta] \implies |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon,\, \forall\, j.$$
   Montrer qu'il existe $f \in C(X, \mathbb{R})$ et une sous-suite (f_{j_k}) qui converge uniformément sur les compacts vers f.

Exercice # 7. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. (a) $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = \infty$.
   (b) Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(K)$ est compact.
   Une fonction avec l'une des propriétés équivalentes (a) ou (b) est une fonction *propre*.[1]
2. Si f est propre, l'image (directe) d'un fermé de $\mathbb{R}^n$ est fermée.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non-constant. Montrer que la fonction polynomiale associée $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est propre, et en déduire le théorème fondamental de l'algèbre.

Exercice # 8.

1. (*Lemme de Steinitz*) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m > n + 1$. Soient $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}^n$ est combinaison convexe de $x_1, \ldots, x_m$, alors il existe $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1} \leq m$ tels que x soit combinaison convexe de $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n+1}}$.
2. (*Théorème de Carathéodory*) L'enveloppe convexe d'une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

Exercice # 9. Soient $K, F \subset \mathbb{R}^n$ un *compact*, respectivement *fermé* non-vides et disjoints. Montrer qu'il existe un hyperplan (affine) fermé de $\mathbb{R}^n$ qui sépare strictement les deux ensembles. Indication : considérer $a \in K$ et $b \in F$ tels que

$$\|a - b\|_2 \leq \|x - y\|_2,\ \forall\, x \in K,\ \forall\, y \in F,$$

et l'hyperplan affine H passant par $(a + b)/2$ et orthogonal à $[a, b]$.

Exercice # 10. Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. $T(B(0, 1))$ est précompacte dans Y.
2. Pour toute suite bornée $(x_j) \subset X$, la suite (Tx_j) contient une sous-suite convergente.

Si T a l'une des propriétés équivalentes 1 ou 2, T est *compact*, et on écrit $T \in \mathscr{K}(X, Y)$.

Exercice # 11. Avec les notations de l'exercice précédent :

1. Si $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ et $R(T)$ est de dimension finie (T est *de rang fini*), alors T est compact.

1. En anglais, *proper function*. En français, risque de confusion avec les fonctions propres (en anglais : *eigenfunctions*) d'un opérateur linéaire.

2. Si $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ et il existe une suite $(T_j) \subset \mathscr{L}(X,Y)$ telle que :
   (a) $\|T_j - T\| \to 0$;
   (b) Chaque T_j est de rang fini,

   alors $T \in \mathscr{K}(X,Y)$.

Généralisation de ce résultat ?

Exercice # 12.

1. Soit $T((a_n)_{n\geq 0}) := (2^{-n}a_n)_{n\geq 0}$. Montrer que $T \in \mathscr{K}(\ell^p, \ell^p)$.
2. Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$, $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ et ν σ-finies. Soit $K \in L^2(X \times Y)$ (préciser le sens de cette hypothèse) et, si $f : X \to \mathbb{C}$ et $x \in X$, soit
$$(Tf)(x) := \int_Y K(x,y)\, f(y)\, d\nu(y).$$
   Montrer que $T \in \mathscr{K}(L^2(Y), L^2(X))$.

Exercice # 13. Pour $0 < \alpha \leq 1$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, soient
$$|f|_\alpha := \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}\,;\, x,y \in [0,1],\, x \neq y\right\},$$
$$C^\alpha([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\,;\, |f|_\alpha < \infty\}, \text{ muni de } \|f\|_\alpha := |f|_\alpha + \|f\|_\infty.$$

Montrer que, si $0 < \beta < \alpha \leq 1$ et $1 \leq p \leq \infty$, les inclusions $C^\alpha([0,1]) \hookrightarrow C^\beta([0,1])$, $C^\alpha([0,1]) \hookrightarrow C([0,1])$ et $C^\alpha([0,1]) \hookrightarrow L^p([0,1])$ sont compactes.

Exercice # 14. Le but de cet exercice est d'établir le résultat suivant.

Théorème de Peano. Soit $f : [t_0, t_0+a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \to [-c, c]$ une fonction continue. Soit $d := \min(a, b/c)$. Alors il existe $x \in C^1([t_0, t_0+d], [x_0-b, x_0+b])$ solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)),\ \forall\, t \in [t_0, t_0+d] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \tag{1}$$

Pour simplifier les calculs, dans ce qui suit nous prenons $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, de sorte que $d = 1$.

Montrer le théorème de Peano en suivant la stratégie suivante. Pour $j \geq 1$, on définit une fonction x_j, sur les intervalles $[k/j, (k+1)/j]$, $k = 0, \ldots, j-1$, par récurrence sur k, comme suit :
$$\begin{aligned}
&x_j(t) = t\, f(0,0), \text{ si } 0 \leq t \leq 1/j \\
&x_j(t) = x_j(1/j) + (t - 1/j) f(1/j, x_j(1/j)), \text{ si } 1/j \leq t \leq 2/j \\
&\vdots \\
&x_j(t) = x_j(k/j) + (t - k/j) f(k/j, x_j(k/j)), \text{ si } k/j \leq t \leq (k+1)/j \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Notons qu'aux points k/j, $1 \leq k \leq j-1$, x_j est définie deux fois, mais que les deux définitions sont cohérentes.

1. Montrer que :
   (a) $|x_j(k/j)| \leq k/j, \forall\, 0 \leq k \leq j-1$, d'où en particulier la définition de x_j a un sens.
   (b) $|x_j(t) - x_j(s)| \leq |t-s|$ et $|x_j(t)| \leq t, \forall\, j \geq 1, \forall\, s, t \in [0,1]$.
   (c) Si $0 \leq k \leq j-1$ et $k/j \leq t \leq (k+1)/j$, alors
$$x_j(t) - \int_0^t f(s, x_j(s))\, ds = \sum_{0 \leq \ell \leq k-1} \int_{\ell/j}^{(\ell+1)/j} [f(\ell/j, x_j(\ell/j) - f(s, x_j(s))]\, ds$$
$$+ \int_{k/j}^t [f(k/j, x_j(k/j) - f(s, x_j(s))]\, ds.$$
   (d) Avec
$$M_j := \sup\{|f(\sigma, u) - f(s, v)|\, ; \sigma, s \in [0,1],\ u, v \in [-1,1],$$
$$|\sigma - s| \leq 1/j,\ |u-v| \leq 1/j\}.'$$
   on a
$$\left| x_j(t) - \int_0^t f(s, x_j(s))\, ds \right| \leq M_j\, t,\ \forall\, j \geq 1,\ \forall\, t \in [0,1].$$
2. En déduire que la suite $(x_j)_{j\geq 1}$ contient une sous-suite qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $x \in C([0,1],[-1,1])$ qui vérifie
$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))\, ds,\ \forall\, t \in [0,1].$$
3. Conclure.

Exercice # 15. Soit U une partie ouverte et connexe d'un espace normé. Si $x, y \in U$, montrer qu'il existe dans U une ligne polygonale connectant x et y.

Exercice # 16. Soit $\mathscr{C}$ le cercle unité du plan complexe. Soient (X, d) un espace métrique et $f \in C(X, \mathscr{C})$. Un *relèvement* de f est une fonction $\varphi \in C(X, \mathbb{R})$ telle que $f = e^{\imath\varphi}$.
1. Si X est connexe et φ_1, φ_2 sont des relèvements de f, montrer que $\varphi_1 - \varphi_2$ est un multiple (constant) de 2π.
2. Si $X := \mathscr{C}$ et $f := \mathrm{id}$, montrer que f n'a pas de relèvement.
3. Si $X = [0,1]$, montrer que tout f a un relèvement.
4. Si $X = \mathbb{R}^n$, montrer que tout f a un relèvement.

Exercice # 17. Soit A une partie connexe d'un espace métrique. Si $A \subset B \subset \overline{A}$, montrer que B est connexe.

Exercice # 18. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *continue*.
1. Montrer que l'ensemble
$$A := \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y}\, ; x, y \in I, x \neq y \right\}$$
   est un intervalle.
2. En déduire le *théorème de Darboux* : si f est *dérivable*, alors f' a la propriété de la valeur intermédiaire.