

Feuille de TD # 4
ESPACES DE HILBERT

Exercice # 1. Soient H un espace de Hilbert et $C \subset H$ un convexe fermé non-vide.

Soit P_C la projection (orthogonale) sur C , c'est-à-dire $P_C(x) :=$ l'unique $y \in H$ tel que $\|x - y\| = d_C(x)$.

1. Soient $x \in H$ et $y \in C$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i) $y = P_C(x)$.
- (ii) $\langle x - y, z - y \rangle \leq 0, \forall z \in C$.

Indication : si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et dérivable, alors 0 est un point de minimum de f si et seulement si $f'(0) \geq 0$. Si cette condition est satisfaite et f est strictement convexe, alors 0 est le seul point de minimum de f . Appliquer ces considérations à

$$[0, 1] \ni t \mapsto f(t) := \|x - [(1-t)y + tz]\|^2.$$

2. En déduire que P_C est 1-lipschitzienne, et en particulier continue.

3. Soit $C := \overline{B}(0, R)$. Montrer que

$$P_C(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq R \\ \frac{R}{\|x\|}x, & \text{si } \|x\| > R \end{cases}.$$

4. Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H , $x \in H$ et $y \in F$, montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i) $y = P_F(x)$.
- (ii) $x - y \in F^\perp$.

En déduire que :

- (a) $H = F \oplus F^\perp$.
- (b) Si $x \in H$ et on écrit $x = y + w$, avec $y \in F$ et $w \in F^\perp$, alors $P_F(x) = y$.
- (c) P_F est linéaire et continue, de norme = 1 si F est non-nul.
- (d) En particulier, si F est de dimension finie, alors P_F coïncide avec la projection orthogonale sur F telle que définie en algèbre linéaire.

De même si F^\perp est de dimension finie.

Exercice # 2. On munit $\mathcal{B}_{]0,1[}$ de la mesure de Lebesgue $\lambda_{]0,1[}$. Soient $H := L^2(]0, 1[, \mathcal{B}_{]0,1[}, \lambda_{]0,1[})$,

$$V := \left\{ f \in H ; \int_0^1 f(x) dx = \int_0^{1/2} f(x) dx = 0 \right\}.$$

1. Montrer que V est fermé dans H . Déterminer une base de V^\perp .
2. Soit $f(x) = x, \forall x \in]0, 1[$. Calculer la projection orthogonale de f sur V , puis $d(f, V)$.

Exercice # 3. Soient E et F deux sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H . Montrer que $(E + F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$ et $(E \cap F)^\perp = \overline{E^\perp + F^\perp}$.

Exercice # 4. Soient H un espace de Hilbert et $(H_n)_{n \geq 0}$ des sous-espaces mutuellement orthogonaux de H .

1. Soit $x_n \in H_n, \forall n \geq 0$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} x_n$ converge si et seulement si la série

$$\sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2 \text{ converge, et dans ce cas}$$

$$\left\| \sum_{n \geq 0} x_n \right\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2.$$

2. Si chaque H_n est fermé et si $\sum_{n \geq 0} x_n$ converge, montrer que

$$P_{H_m} \left(\sum_{n \geq 0} x_n \right) = x_m, \forall m \geq 0.$$

Exercice # 5. Soient (X, \mathcal{T}, μ) un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Soit

$$C := \{f \in L^p(X, \mathcal{T}, \mu); f \geq 0\}.$$

1. Redéfinir proprement C .
2. Montrer que C est convexe et fermé.
3. Montrer que, si $f \in L^p(X, \mathcal{T}, \mu)$, alors $g := f \chi_{[f \geq 0]}$ est le seul élément de C tel que $\|f - g\|_p = d_C(f)$.
4. Pour $p = 2$, retrouver le résultat de la question précédente en utilisant l'exercice 1, question 1.
5. Que se passe-t-il si $p = \infty$?

Exercice # 6. Si E, F sont des espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ est défini par :

$$T^*y'(x) = y'(Tx), \forall y' \in F', \forall x \in E.$$

Si H, K sont des espaces de Hilbert de produits scalaires $\langle \cdot, \cdot \rangle$, respectivement (\cdot, \cdot) , et $T \in \mathcal{L}(H, K)$, alors $T^* \in \mathcal{L}(K, H)$ est défini par :

$$\langle T^*y, x \rangle = (y, Tx), \forall y \in K, \forall x \in H.$$

Montrer que les deux définitions sont compatibles.

Exercice # 7. Calculer T^* si :

1. E est une espace de Hilbert, $F = \mathbb{R}$, $T \in E'$.
2. $E = F = H$ (espace de Hilbert), T est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé V de H .
3. $E = F = \mathbb{K}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$, et T est de matrice A dans une base orthonormée.
4. $E = F = L^2(X, \mathcal{T}, \mu)$, et $Tf := hf$, $\forall f \in L^2(X, \mathcal{T}, \mu)$, avec $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée fixée.
5. $E = L^2(Y, \mathcal{S}, \nu)$, $F = L^2(X, \mathcal{T}, \mu)$, avec μ et ν mesures σ -finies, et

$$Tf(x) := \int_Y K(x, y) f(y) d\nu(y), \quad \forall f \in L^p(Y, \mathcal{S}, \nu), \text{ pour presque tout } x \in X,$$

où $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction $\mathcal{T} \otimes \mathcal{S}$ -mesurable, dans l'un des cas suivants :

- (a) $K \in L^2(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}, \mu \otimes \nu)$.
- (b) $M_1 := \sup_{x \in X} \int_Y |K(x, y)| d\nu(y) < \infty$ et $M_2 := \sup_{y \in Y} \int_X |K(x, y)| d\mu(x) < \infty$.

(K est le *noyau intégral de T* .)

Que devient ce résultat si $E = F = \ell^2$?

6. $E = F = \ell^2$, $T(x_0, x_1, \dots) := (0, x_0, x_1, \dots)$. (T est le *shift*.)

Exercice # 8. Soient H, K des espaces de Hilbert. $T \in \mathcal{L}(H, K)$ est une *isométrie partielle* s'il existe $E \subset H$ un sous-espace fermé tel que $U := T|_E$ soit une isométrie et $T|_{E^\perp} = 0$. Pour un tel T , calculer T^* en fonction de U .

Exercice # 9. Soit $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$. Montrer qu'il existe des réels $b_{m,n}$, $\forall m, n \geq 0$, tels que :

1. $(b_{m,n})_{m \geq 0} \in \ell^2$, $\forall n \geq 0$.
2. $(b_{m,n})_{n \geq 0} \in \ell^2$, $\forall m \geq 0$.
3. $Tx = \left(\sum_{m \geq 0} b_{m,n} a_m \right)_{n \geq 0}$, $\forall x = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2$.

Déterminer T^* .

Exercice # 10. Soient H un espace de Hilbert, $(f_n)_{n \geq 0} \subset H$ une suite orthonormée, $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ une suite bornée.

1. Montrer que la relation

$$Tx := \sum_{n \geq 0} a_n \langle x, f_n \rangle f_n, \quad \forall x \in H,$$

définit un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$.

2. Calculer T^* .

Exercice # 11. Soit H un espace de Hilbert séparable. Montrer que toute famille orthonormée $\mathcal{F} \subset H$ est au plus dénombrable.

Indication : les boules $B(x, \sqrt{2}/2)$, $x \in \mathcal{F}$, sont mutuellement disjointes.

Exercice # 12. On désigne par H l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{iwt} \in \mathbb{C}$, où w parcourt \mathbb{R} .

Soit

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} dt, \forall f, g \in H.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur H .
2. Vérifier que la famille $\{e^{iwt}\}_{w \in \mathbb{R}}$ est orthonormée.
3. H est-il un espace de Hilbert?

Exercice # 13. Cet exercice prépare aux questions 3 et 4 de l'exercice suivant. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in L^p([0, \infty[, \mathcal{B}_{[0, \infty[}, \lambda_{[0, \infty[})$.

1. Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re} z > 0\}$. Montrer que la fonction

$$\mathbb{H} \ni z \mapsto F(z) := \int_0^\infty g(t) e^{-zt} dt \in \mathbb{C}$$

est holomorphe.

2. Soit $a > 0$. On suppose que

$$\int_0^\infty t^n g(t) e^{-at} dt = 0, \forall n \geq 0. \quad (1)$$

- (a) Montrer que

$$\int_0^\infty g(t) e^{-bt} dt = 0, \forall b \in]0, a].$$

- (b) En déduire que $F(z) = 0, \forall z \in \mathbb{H}$.

- (c) En utilisant le fait que la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ est injective, en déduire que $g = 0$.

3. De même, si $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ et on remplace (1) par l'hypothèse

$$\int_{\mathbb{R}} t^n g(t) e^{-at^2} dt = 0, \forall n \geq 0,$$

avec $a > 0$, alors $g = 0$.

Exercice # 14. (Bases hilbertiennes de fonctions polynomiales)

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non-dégénéré et soit H un espace de Hilbert de (classes d'équivalence de) fonctions sur I tel que l'espace des fonctions polynomiales sur I : (i) s'identifie avec $\mathbb{R}[X]$, (ii) soit contenu dans H , et (iii) soit dense dans H . Si $\{P_n\}_{n \geq 0}$ est une famille orthonormée de fonctions polynomiales, avec $\deg P_n = n, \forall n \geq 0$, montrer que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de H .

2. On munit $I := [-1, 1]$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue $\lambda_{[-1,1]}$. Soit $H := L^2([-1, 1], \mathcal{F}_{[-1,1]}, \lambda_{[-1,1]})$. Les *polynômes de Legendre* sont définis par :

$$P_n(x) := \alpha_n \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad \forall n \geq 0, \forall x \in [-1, 1],$$

où les $\alpha_n > 0$ sont des constantes telles que $\|P_n\| = 1, \forall n \geq 0$.

Montrer que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de H .

3. On munit $I := [0, \infty[$ de la tribu borélienne et de la mesure μ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que, dans $L^2([0, \infty[, \mathcal{F}_{[0,\infty[}, \mu])$, les *polynômes de Laguerre* :

$$Q_n(x) := \beta_n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad \forall n \geq 0, \forall x \geq 0,$$

(avec $\beta_n > 0$ constantes convenables) forment une base hilbertienne.

4. On munit \mathbb{R} de la tribu borélienne et de la mesure ν de densité $e^{-x^2/2}$. Montrer que, dans $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \nu)$, les *polynômes d'Hermite*

$$R_n(x) := (-1)^n \gamma_n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2/2}], \quad \forall n \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

(avec $\gamma_n > 0$ constantes convenables) forment une base hilbertienne.

Exercice # 15. Cet exercice prépare aux questions 3 et 4 de l'exercice suivant.

Soit $(E_n)_{n \geq 0}$ une suite de sous-espaces de l'espace de Hilbert H telle que :

(i) E_n est de dimension finie, $\forall n \geq 0$.

(ii) $E_n \subset E_{n+1}, \forall n \geq 0$.

(iii) $E_0 \cup E_1 \cup \dots$ est dense dans H .

On pose $E_{-1} := \{0\}$. Soit \mathcal{F}_n une base orthonormée de $E_n \ominus E_{n-1}$, $n \geq 0$. Montrer que $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \dots$ est une base hilbertienne de H .

Exercice # 16. Soit $H := L^2([0, 1[, \mathcal{F}_{[0,1[}, \lambda_{[0,1[})$. Pour $n \geq 0$, soit

$$E_n := \{f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ est constante sur } [j/2^n, (j+1)/2^n[, \forall j = 0, 1, \dots, 2^n - 1\}.$$

1. Montrer que les E_n vérifient les hypothèses de l'exercice précédent.

Indication pour (iii) : si $f \in C_c([0, 1[)$ et

$$f_n(x) := f(j/2^n), \quad \forall n \geq 0, \forall 0 \leq j \leq 2^n - 1, \forall x \in [j/2^n, (j+1)/2^n[,$$

alors $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $[0, 1[$.

2. Calculer $\dim E_n$, $n \geq 0$.

3. Soit E la fonction partie entière. Montrer que les fonctions

$$w_I(x) := (-1)^{E(2^{n_1}x)} (-1)^{E(2^{n_2}x)} \dots (-1)^{E(2^{n_k}x)},$$

$$\forall k \geq 0, \forall I = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k\} \subset \mathbb{N}^*$$

(avec la convention $w_\emptyset = 1$), forment une base hilbertienne de H . C'est la *base de Walsh*.

Indication : si $n \geq 1$, montrer que $\{w_I ; \max I = n\}$ est une famille orthonormée continue dans $E_n \ominus E_{n-1}$.

4. Si $H_0 := 1$ et, pour $n \geq 0$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$,

$$H_{j+2^n}(x) := \begin{cases} 2^{n/2}, & \text{si } 2j/2^{n+1} \leq x < (2j+1)/2^{n+1} \\ -2^{n/2}, & \text{si } (2j+1)/2^{n+1} \leq x < (2j+2)/2^{n+1}, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

montrer que $\{H_k\}_{k \geq 0}$ est une base hilbertienne de H . C'est la *base de Haar*.

Exercice # 17. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, on pose

$$X \times Y \ni (x, y) \mapsto f \otimes g(x, y) := f(x)g(y).$$

Soient $H := L^2(X, \mathcal{T}, \mu)$ et $K := L^2(Y, \mathcal{S}, \nu)$, avec μ, ν σ -finies. Si H, K sont séparables, de bases hilbertiennes $\{e_m\}_{m \geq 0}$, respectivement $\{f_n\}_{n \geq 0}$, montrer que $\{e_m \otimes f_n\}_{m, n \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}, \mu \otimes \nu)$.

Indication : montrer que

$$\|h\|_2^2 = \sum_{m, n \geq 0} \langle h, e_m \otimes f_n \rangle^2, \quad \forall h \in L^2(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}, \mu \otimes \nu).$$

Exercice # 18. Soit H un espace de Hilbert séparable, et soient $\{e_n\}, \{f_n\}$ deux bases hilbertiennes de H . Montrer que

$$S := \sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \|T^*f_n\|^2 = \sum_n \|Tf_n\|^2 \in [0, \infty].$$

Si H est de dimension finie, $S^{1/2} < \infty$ est la *norme de Frobenius* de T . Si H est de dimension infinie, $S^{1/2} \in [0, \infty]$ est la *norme de Hilbert-Schmidt* de T .

Exercice # 19. Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\langle Tx, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$. Montrer que $\text{Id} + T$ est bijectif.

Indication : considérer

$$a(x, y) := \langle x, y \rangle + \langle Tx, y \rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Exercice # 20. Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que $\text{Id} + T^*T$ est bijectif.

Exercice # 21. On munit $]0, 1[$ de la tribu boréienne $\mathcal{T}_{]0, 1[}$ et de la mesure de Lebesgue $\lambda_{]0, 1[}$. Soit $H := L^2(]0, 1[, \mathcal{T}_{]0, 1[}, \lambda_{]0, 1[})$.

1. Si $f \in H$, on pose

$$Tf(x) := \int_0^x f(t) dt, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Montrer que la définition est correcte et que Tf est une fonction continue.

2. Montrer que, pour tout $g \in H$, il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\int_0^1 f(x) h(x) dx + \int_0^1 Tf(x) Th(x) dx = \int_0^1 g(x) h(x) dx, \quad \forall h \in H.$$