

Feuille 5 : Différentielle d'ordre k et fonctions de classe C^k

Objectifs	OUI	NON
Déterminer la différentielle seconde d'une application et sa hessienne		
Montrer qu'une application est de classe C^k		
Appliquer le théorème de Schwarz		
Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (voire 3)		
Calculer l'expression d'un opérateur différentiel (Laplacien, divergence)		

Exercice 1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\alpha < 2$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est différentiable en $(0, 0)$.
4. Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Preuve fautive à corriger

Déterminer toutes les erreurs commises dans la preuve ci-dessous et la corriger.

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrons que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

En effet, les dérivées partielles premières de f en $(0, 0)$ se calculent comme suit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

De plus, comme f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a, pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{yx^2(x^2 + 3y^2)}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

et donc, pour tout $h \neq 0$ et pour tout $k \neq 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, k) = 0,$$

et donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = 0 = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

On en déduit que f est deux fois différentiable au point $(0, 0)$.

Exercice 3. Egalité des dérivées partielles croisées

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et sont égales.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0, 0)$.

Exercice 4. Formules de Taylor-Young – Applications du cours

Ecrire la formule de Taylor-Young :

1. à l'ordre deux pour une fonction de trois variables ;
2. à l'ordre trois pour une fonction de deux variables ;
3. à l'ordre treize en $(0, 0)$ pour $f(x, y) = y^5 + x^3 y - x^2 + y$.

Exercice 5. Formules de Taylor-Young – Calculs

Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 + 3 \cos(xy)$;
- $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = e^{xy} + (x + y)^3$;
- $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = \arctan(x^2 + y)$.

Puis déterminer les formules de Taylor-Young à l'ordre 2 en $(0, 0)$ pour f et h , et en $(1, 0)$ pour g .

Exercice 6. Laplacien et applications harmoniques

Pour toute fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on définit le

Laplacien de f par $\Delta f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$ et on dit que f est harmonique sur Ω si $\Delta f = 0$ sur Ω , c'est-à-dire si elle vérifie l'équation de Laplace.

1. Si $v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable sur un ouvert Ω , on note $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $\operatorname{div}(v) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k}$ la divergence de v . Montrer que, si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois différentiable sur un ouvert Ω ,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla_x f).$$

2. Montrer que pour $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.
3. Que peut-on dire du Laplacien de la fonction $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \ln \|x\|_2$? Pour quelle dimension n la fonction g est-elle harmonique ?
4. Montrer que la fonction $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto \frac{e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}}{(2\pi t)^{\frac{n}{2}}}$, appelé noyau de la chaleur, vérifie

$$\text{l'équation de la chaleur } \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta u.$$

Exercice 7. Laplacien en coordonnées polaires

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soient (r, θ) les coordonnées polaires standard dans le plan de telle sorte que l'application

$$]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

soit un changement de variable. Soit $F :]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Il s'agit de l'expression de f en coordonnées polaires. Le but de cet exercice est de calculer le Laplacien en coordonnées polaires, c'est-à-dire :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}(r, \theta).$$

1. Montrer que $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial F}{\partial r} \right)$.
2. Montrer que $r \frac{\partial F}{\partial r} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Montrer que $\frac{\partial F}{\partial \theta} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}$.
4. Utiliser les résultats des questions précédentes et démontrer la formule demandée.
5. Dédurre de la formule démontrée l'expression du laplacien de la fonction radiale f définie sur $\mathbb{R}^2$ telle que $f : (x, y) \mapsto F(\|(x, y)\|_2)$ où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
6. **Application 1 :** Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \quad f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{2s}}.$$

7. **Application 2 :** Refaire le calcul des laplaciens des questions 3. et 4. de l'exercice 6 en utilisant cette nouvelle formule.

Exercices supplémentaires (applications directes, en autonomie)

Exercice 8. Composées et fonctions de classe C^1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .

1. On définit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2 + 2t, t^2)$. Montrer que g est de classe C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f .
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$. Montrer que h est de classe C^1 et exprimer ses dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 9. Fonctions de classe C^1

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^1 .

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\forall (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = \frac{xy^3}{x^4 + y^2}$ et $f(0, 0) = 0$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\forall (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)$ et $f(0, 0) = 0$.

Exercice 10. Matrices hessiennes

Déterminer les matrices hessiennes des fonctions suivantes sur leur domaine de définition, puis au point a donné.

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = (x + y + z)^2, a = (1, -1, 1)$.
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2, a = (2, 0, -1)$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = \sin(xyz), a = (\pi, 0, 1)$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sin^2\left(\frac{y}{x}\right), a = (3, \pi)$.