Feuille 7 : Modélisation & optimisation. Convexité

Exercice 1. Modéliser le problème suivant.

Un avion-cargo a trois compartiments : avant, médian et arrière. Ces compartiments ont les capacités suivantes :

Compartiment	Tonnage (tonnes)	Volume (m^3)
Avant	10	68
Médian	16	87
Arrière	8	53

De plus, les chargements des compartiments doivent être proportionnels à leurs tonnages, de sorte à assurer la stabilité de l'avion.
Quatre cargos sont prêts pour l'expédition. Leurs caractéristiques sont les suivantes :

Cargo	Tonnage (tonnes)	Volume (m^3/tonne)	Profit (€/tonne)
C1	18	4,8	310
C2	15	6,5	380
C3	23	5,8	350
C4	12	3,9	285

On peut charger dans l'avion toute proportion de chaque cargaison.
Déterminer quel proportion de chaque cargo doit être chargée dans chaque compartiment afin de maximiser le profit.

Exercice 2. Modéliser le problème suivant.

L'opérateur téléphonique historique Jaune et Rouge veut installer une antenne téléphonique pour desservir quatre nouveaux clients. Ceux-ci ont les caractéristiques suivantes :

Client	Coordonnées (en km)	Heures de communication/jour
1	(5,10)	200
2	(10,5)	150
3	(0,12)	200
4	(12,0)	300

Par ailleurs, la loi interdit d'installer une nouvelle antenne à moins de 5 km des antennes déjà existantes, qui sont aux points $(-5, 10)$ et $(5, 0)$.
Quel sera l'emplacement final de l'antenne ?

Exercice 3. Modéliser le problème suivant.

M. J. Phelps a comme mission impossible le sauvetage du monde. En aura-t-il les moyens, sachant que :

(a) Une bombe nucléaire a été amorcée par le dictateur du Propan au bord d'un yacht amarré à 50 mètres du rivage

(b) M. Phelps se trouve à 100 m du point de la plage le plus proche du yacht. Il (M. Phelps, pas le yacht) court sur la plage à 18 km/h et nage à 10 km/h

(c) La bombe est programmée pour exploser dans 65 secondes, alors qu'il en faut 30 pour la désamorcer.

Exercice 4. Modéliser le problème suivant.

M. I. Jones, qui déteste les serpents venimeux, doit, dans sa quête pour retrouver la croix de Coronado, éviter une salle remplie de ceux-ci. Cette salle est longue de 10 m et haute de 5. Pour y parvenir, M. Jones veut se servir d'une échelle. Quelle est la longueur minimale de l'échelle ?

Exercice 5. Modéliser le problème suivant.

L'entreprise Geppetto & Cie est un spécialiste mondialement reconnu des pantins et trains en bois. Chaque pantin lui rapporte, à la vente, 3 €, et chaque train 2 €. Pour produire un pantin, il faut une heure de menuiserie et deux heures de finissage. Pour un train, il en faut une heure et une heure. M. Geppetto emploie deux menuisiers et deux spécialistes du finissage, qui travaillent 40 heures par semaine. Il passe lui-même 20 heures par semaine à des travaux de finissage. Les trains ont beaucoup de succès, et il sait qu'il pourra vendre toute sa production. Par contre, il ne peut vendre plus de 40 pantins par semaine. Que doit faire M. Geppetto pour optimiser son revenu ?

Exercice 6. Modéliser le problème suivant.

La banque Silverman Bass veut investir un million d'euros dans des obligations, prêts immobiliers, leasings ou prêts personnels. Les rendements annuels de ces investissements sont respectivement de 6 %, 10 %, 8 % et 13 %.
Afin de limiter les risques, la banque s'impose :

(a) D'allouer au prêts personnels au plus la moitié de ce qui est investi en obligations

(b) D'investir en prêts immobiliers au plus autant qu'en leasings

(c) De ne pas dépasser 20 % de prêts personnels.

Quelle doit être la stratégie de la banque ?

Exercice 7. Modéliser le problème suivant.

L'entreprise Doubeliou & father vend du pétrole et désire optimiser la gestion de son stock. La demande est de 300 barils par jour. Les livraisons ordinaires ont lieu les lundis. En dehors de ce jour, le pétrole est surfacturé de 80 € par baril. Le coût du stockage est de 6 € par baril et par jour.
Comment MM Doubeliou et père doivent-ils gérer leur entreprise afin d'optimiser les frais sur quatre semaines (du lundi au dimanche) ?

Exercice 8. Trouver $\max\{x + y\,;\, x^2 - xy + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 9. Si D est un disque fermé du plan, trouver $\max\{x + y\,;\, (x, y) \in D\}$.

Exercice 10. Soit D une partie non-vide et bornée du plan. Écrire la condition que doit satisfaire le centre d'inertie de D et, sous réserve d'existence des intégrales considérées, donner son expression.

Exercice 11. Prouver l'inégalité des moyennes

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ \forall x_1, \ldots, x_n > 0,$$

en utilisant l'optimisation sous contrainte.

Exercice 12. Trouver $\max xyz$ sous les contraintes $x, y, z > 0$, $x + y + z = 4$, $xy + yz + zx = 5$.

Exercice 13. Montrer l'inégalité suivante, en considérant un problème de minimisation sous les contraintes d'égalité $xyz = 1$ et $x + y + z = a$.
Si $x, y, z > 0$ satisfont $xyz = 1$, alors

$$(x + y + z)^2 \leq 3 + 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Exercice 14. Trouver les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $A > 0$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & 3 & b \end{pmatrix}$.

Exercice 15. Compléter et prouver l'énoncé suivant : si..., si $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe, et si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et..., alors $g \circ f$ est convexe.

Exercice 16. Si $\|\ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, montrer que $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto e^{\|x\|}$ est convexe.