Feuille de TD # 7
Espaces L^p . Convolution

Cadre. Sauf mention contraire, nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathcal{F}, \mu)$. Les espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p , $1 \leq p \leq \infty$, sont relatifs à cet espace mesuré.

Exercice # 1. (Inégalité de Young) Soient $1 < p, q < \infty$ exposants conjugués. Alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \forall a, b \in [0, \infty[.$$

Indication : étudier, pour b fixé, la fonction $a \mapsto a^p/p + b^q/q - ab$.

Exercice # 2. Soient $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer les propriétés suivantes.

- $\|tf\|_p = |t| \|f\|_p$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).
- Si $f = g$ p. p., alors $\|f - g\|_p = 0$ et $\|f\|_p = \|g\|_p$.
- $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ p. p.
- La définition de $\|f\|_\infty$ est correcte, au sens suivant. Soit $A := \{M \in [0, \infty]; |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}$. Alors A est non vide et A a un plus petit élément, m . Cet m est le plus petit nombre C de $[0, \infty]$ avec la propriété $|f(x)| \leq C$ p. p.
- $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour $p = 1$ et $p = \infty$. (Ici, $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$.)

Exercice # 3. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}_U$. Si $f \in C(U)$, montrer que $\|f\|_\infty = \sup_U |f|$.

Exercice # 4. Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons des fonctions $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (pas nécessairement mesurables). Montrer que la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p. a les propriétés suivantes.

- Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f + tg \sim f_1 + tg_1$, $\forall t \in \mathbb{R}$ (à condition que les fonctions soient finies en tout point).
- Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $fg \sim f_1g_1$.
- Si $f \sim g$ et si $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, alors $\Phi \circ f \sim \Phi \circ g$.
- Dans cette question, $X := \mathbb{R}^n$ et $\mu := \lambda_n$.
 - Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall x, h \in \mathbb{R}^n$. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall h$.
 - Soient $f, g, f_1, g_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, avec $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $h \sim h_1$, où

$$h(y) := f(x - y)g(y), h_1(y) := f_1(x - y)g_1(y), \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 5. Nous considérons la relation d'équivalence de l'exercice précédent, mais uniquement pour des fonctions mesurables.

- Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$. Montrer que toute classe d'équivalence contient un représentant borélien.
- Même propriété si à la place de $\mathbb{R}^n$ nous considérons une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$.
- Généralisation?

Exercice # 6. Donner un sens aux expressions suivantes.

- a) « $f \in L^p, f \geq 0$ ».
 b) « $[f \in L^p, \|f\|_p = 0] \implies f = 0$ ».

Exercice # 7. Donner un sens aux affirmations suivantes, puis les prouver ou les réfuter.

- a) Si $f \in L^p$, alors f est mesurable.
 b) Si $f \in L^p$, avec $1 \leq p < \infty$, alors f est finie p. p.
 c) $f \in L^1 \implies \mu(\{x \in X; |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_1/t, \forall t > 0$.

Plus généralement, si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p$, alors

$$f \in L^p \implies \mu(\{x \in X; |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_p^p/t^p, \forall t > 0 \text{ (inégalité de Markov)}.$$

Exercice # 8. Nous munissons les parties boréliennes U de $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue λ_n . Décider pour quelles valeurs de p nous avons $f \in \mathcal{L}^p(U, \lambda_n)$ si :

- a) $U :=]0, 1], f(x) := \frac{1}{x^a}, a \in \mathbb{R}$.
 b) $U := \mathbb{R}, f := \chi_{\mathbb{Q}}$.
 c) $U :=]0, \infty[, f(x) := \frac{\sin x}{x}$.
 d) $U := \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geq 1\}, f(x) := \frac{\sin |x|}{|x|^a}, a \in \mathbb{R}$ (avec « $|\cdot|$ » la norme euclidienne standard).

Exercice # 9. Soit $1 \leq p < \infty$. Si f est mesurable, soit

$$F_f(t) := \mu(\{x \in X; |f(x)| > t\})$$

la fonction de répartition de f .

- a) Si μ est σ -finie, montrer la formule du gâteau en étages

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} F_f(t) dt. \tag{1}$$

- b) Montrer que (1) reste vraie sans l'hypothèse μ σ -finie. Indications : commencer par une fonction étagée, et traiter le cas général par convergence monotone.

Exercice # 10. (Espaces ℓ^p)

- a) Si μ est la mesure de comptage, alors l'égalité p. p. équivaut à l'égalité. Ainsi, nous pouvons identifier naturellement $\mathcal{L}^p$ et L^p .

Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors nous définissons

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \mathcal{L}^p = L^p, \forall 1 \leq p \leq \infty.$$

Nous définissons de même $\ell^p(A)$, avec A a. p. d. (Cas particuliers importants : $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{N}^*$.)

- b) Si $(a_n)_n$ est une suite indexée sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\|(a_n)_n\|_p = \begin{cases} (\sum_n |a_n|^p)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_n |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

- c) Montrer que, si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$. De plus, ces inclusions sont « continues » : si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors $\|(a_n)_n\|_r \leq \|(a_n)_n\|_p$.
- d) Soit $(a_n)_n \in \ell^p$, avec $p < \infty$. Montrer que pour tout $r > p$ nous avons $\lim_{s \rightarrow r} \|(a_n)_n\|_s = \|(a_n)_n\|_r$.
- e) Si $1 \leq r < \infty$ et $(a_n)_n$ est une suite arbitraire, alors $\lim_{s \searrow r} \|(a_n)_n\|_s = \|(a_n)_n\|_r$.

Exercice # 11. (Espaces L^p quand la mesure est finie) Nous supposons μ finie.

- a) Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^\infty \subset L^{p_2} \subset L^{p_1} \subset L^1$.
Plus spécifiquement, montrer que, $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors $\|f\|_p \leq (\mu(X))^{1/p-1/r} \|f\|_r$, $\forall f$.
- b) Si une variable aléatoire positive a un moment d'ordre $k \geq 2$ fini, montrer que ses moments d'ordre ℓ , avec $1 \leq \ell \leq k - 1$, sont finis.
- c) Soit $f \in L^p$, avec $p > 1$. Montrer que pour tout $1 \leq r < p$ nous avons $\lim_{s \rightarrow r} \|f\|_s = \|f\|_r$.
- d) Si $f \in L^\infty$, alors :
(i) $f \in L^p, \forall 1 \leq p < \infty$.
(ii) L'application $[1, \infty] \ni p \mapsto \|f\|_p$ est continue. En particulier, $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice # 12. Rappelons la définition de la fonction Gamma d'Euler :

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \forall x > 0.$$

Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0, \infty[$. On pourra utiliser la définition de la convexité et l'inégalité de Hölder.

Exercice # 13. Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(I)$. Posons $F(x) := \int_0^x f(t) dt, \forall x \geq 0$.

- a) Donner un sens à cette définition. Montrer que F est bien définie.
- b) Si $p = \infty$, montrer que F est lipschitzienne.
- c) Si $1 < p < \infty$, montrer que F est « hölderienne » : il existe $C < \infty$ et $\alpha \in]0, 1[$ (que l'on déterminera) tels que $|F(x) - F(y)| \leq C |x - y|^\alpha, \forall x, y \geq 0$.
- d) Si $p = 1$, montrer que F est continue.
- e) Si $p = 1$, montrer que F est « absolument continue » : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n$ sont tels que $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \dots + (b_n - a_n) < \delta$, alors $|F(b_1) - F(a_1)| + |F(b_2) - F(a_2)| + \dots + |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon$.
Indication : lemme de Lebesgue.

Exercice # 14. (Lemme de Brezis-Lieb) Soit $1 \leq p < \infty$. Nous considérons une suite $(f_j) \subset \mathcal{L}^p$ telle que :

- i) $\|f_j\|_p \leq C_0 < \infty, \forall j$.
ii) $f_j \rightarrow f$.

- a) Montrer que $f \in \mathcal{L}^p$.
b) A-t-on nécessairement $f_j \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p$?

Dans la suite, nous nous proposons de montrer le *lemme de Brezis-Lieb*

$$\int |f_n|^p = \int |f|^p + \int |f_n - f|^p + o(1) \text{ quand } n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

En fait, nous allons montrer la conclusion plus forte

$$\int \| |f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p \| \rightarrow 0. \quad (3)$$

c) Expliquer pourquoi (3) $\implies$ (2).

d) Si $p = 1$, montrer que

$$\| |f_n| - |f - f_n| \| \leq |f|$$

et conclure via le théorème de convergence dominée.

e) Si $1 < p < \infty$, montrer que :

(i) Il existe $C < \infty$ telle que

$$\| |t|^p - |t - 1|^p - 1 \| \leq \begin{cases} C, & \text{si } |t| \leq 1 \\ C|t|^{p-1}, & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}.$$

(ii) En déduire que

$$\| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \| \leq \begin{cases} C|f|^p, & \text{si } |f_n| \leq |f| \\ C|f_n|^{p-1}|f|, & \text{si } |f_n| \geq |f| \end{cases}. \quad (4)$$

(iii) Soit $M \geq 1$. On définit

$$\begin{aligned} A_{n,M} &:= \{x \in X ; |f_n(x)| \leq M|f(x)|\}, \\ B_{n,M} &:= \{x \in X ; |f_n(x)| > M|f(x)|\}. \end{aligned}$$

En utilisant (4) et le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\int_{A_{n,M}} \| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \| \rightarrow 0.$$

(iv) Montrer que

$$\int_{B_{n,M}} |f|^p \leq \frac{C_0^p}{M^p}. \quad (5)$$

(v) Utiliser (5), la deuxième inégalité de (4) et l'inégalité de Hölder pour montrer que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_n \int_{B_{n,M}} \| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \| = 0.$$

(vi) Conclure.

Exercice # 15. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Si $f_n \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p$ et $f_n \rightarrow g$ p. p., quelle est la relation entre f et g ?

Exercice # 16. a) En examinant la preuve de l'inégalité de Hölder, montrer le résultat suivant.

Soient $f \in L^p \setminus \{0\}$ et $g \in L^q \setminus \{0\}$, avec $1 < p, q < \infty$ conjugués et $f, g \geq 0$. Alors

$$\int fg = \|f\|_p \|g\|_q \iff [\exists C \in]0, \infty[\text{ tel que } f^p = C g^q].$$

b) Si nous ne supposons plus $f, g \geq 0$, montrer que

$$\int fg = \|f\|_p \|g\|_q \iff [\exists C \in]0, \infty[\text{ tel que } |f|^{p-1} f = C |g|^{q-1} g].$$

Exercice # 17. a) En utilisant éventuellement l'exercice précédent, montrer le résultat suivant.

Si $1 < p < \infty$ et $f, g \in L^p \setminus \{0\}$, alors

$$\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p \iff [\exists C \in]0, \infty[\text{ tel que } f = C g].$$

b) Que devient cette condition si $p = 1$?

Exercice # 18. Soient $1 \leq p_2, \dots, p_k \leq \infty$ tels que $\sum_{j=1}^k 1/p_j = 1$. Alors

$$\|f_1 f_2 \cdots f_k\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k}, \forall f_1, f_2, \dots, f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Exercice # 19. Soient $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$.

a) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$.

b) Montrer que $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^\theta \|f\|_{p_1}^{1-\theta}, \forall f$.

Exercice # 20. (Inégalités pour des opérateurs à noyau) Nous travaillons dans un espace produit $(X \times Y, \mathcal{F} \otimes \mathcal{S}, \mu \otimes \nu)$, avec μ et ν σ -finies. Toutes les fonctions considérées sont mesurables et, par souci de simplicité, positives. Un noyau est une fonction $K : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Nous voulons majorer les quantités

$$A = A(f, g) := \int_{X \times Y} K(x, y) f(x) g(y) d\mu \otimes \nu(x, y), \text{ avec } f : X \rightarrow \mathbb{R}_+, g : Y \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

$$B = B(f) := \left\| y \mapsto \int_X K(x, y) f(x) d\mu(x) \right\|_p \text{ avec } f : X \rightarrow \mathbb{R}_+.$$

a) Montrer que

$$B(f) = \sup\{A(f, g) ; g \in \mathcal{L}^q(Y; \mathbb{R}_+), \|g\|_q \leq 1\}.$$

b) Soient $\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \gamma : Y \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. En utilisant l'identité (évidente)

$$K(x, y) f(x) g(y) = \left([K(x, y)]^{1/p} \frac{\alpha(x)}{\gamma(y)} f(x) \right) \times \left([K(x, y)]^{1/q} \frac{\gamma(y)}{\alpha(x)} g(y) \right),$$

l'inégalité de Hölder (avec les exposants p et q) et le théorème de Tonelli, obtenir l'inégalité

$$A(f, g) \leq \left(\int_X F(x) \alpha^p(x) f^p(x) d\mu(x) \right)^{1/p} \times \left(\int_Y G(y) \gamma^q(y) g^q(y) d\nu(y) \right)^{1/q}, \quad (6)$$

où

$$F(x) := \int_Y \frac{K(x, y)}{\gamma^p(y)} d\nu(y), \quad G(y) := \int_X \frac{K(x, y)}{\alpha^q(x)} d\mu(x).$$

c) (Inégalité de Schur) En prenant $\alpha(x) \equiv 1, \gamma(y) \equiv 1$, obtenir l'inégalité de Schur

$$B(f) \leq \left[\sup_{x \in X} \int_Y K(x, y) d\nu(y) \right]^{1/p} \left[\sup_{y \in Y} \int_X K(x, y) d\mu(x) \right]^{1/q} \|f\|_p.$$

d) (Inégalité de Young) En prenant $\alpha(x) \equiv 1$ et $\gamma(y) \equiv 1$, obtenir, pour $f, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$, l'inégalité de Young $\|h * f\|_p \leq \|h\|_1 \|f\|_p$.

e) (Inégalité de Hardy) En prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, obtenir l'inégalité de Hardy

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} \left(\int_0^x f(y) dy \right)^p dx \leq q^p \int_0^\infty f^p(x) dx.$$

f) (Inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz) *Préliminaire*. Nous admettons la formule des compléments (due à Euler)

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)t^a} dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}, \quad \forall 0 < a < 1. *$$

En prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, montrer les inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz

$$\int_{]0, \infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y} dx dy \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p \|g\|_q,$$

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y} dx \right|^p dy \leq \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \right)^p \|f\|_p^p.$$

Exercice # 21. (Inégalité de Hardy, encore) Nous proposons ici une autre approche pour montrer l'inégalité de Hardy obtenue dans l'item e) de l'exercice précédent. Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $1 < p < \infty$. Si $f \in \mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(I)$, nous posons $F(x) := \int_0^x f(t) dt, \forall x > 0$.

a) Si $f \in C_c^\infty(I)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties l'inégalité de Hardy

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p} dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p dx. \quad (7)$$

b) Montrer que l'inégalité (7) reste vraie pour tout $f \in \mathcal{L}^p$.

Exercice # 22. (Inégalité de Landau)

a) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si f est Lebesgue intégrable, montrer qu'il existe une suite $(R_n)_n$ telle que :

(i) $2n \leq R_n \leq 2n + 1, \forall n$.

(ii) $f(R_n) \rightarrow 0$.

b) Si, de plus, f est dérivable, montrer qu'il existe une suite $(S_n)_n$ telle que

(i) $R_n < S_n < R_{n+1}, \forall n$ (et donc $S_n \rightarrow \infty$).

(ii) $f(S_n) f'(S_n) \rightarrow 0$.

Indication : appliquer le théorème des accroissements finis à f^2 .

De même, il existe $(T_n)_n$ telle que $T_n \rightarrow -\infty$ et $f(T_n) f'(T_n) \rightarrow 0$.

*. Cette identité peut s'obtenir, par exemple, en appliquant le théorème des résidus en analyse complexe.

- c) (Inégalité de Landau) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que f soit (Lebesgue) intégrable et f'' soit bornée. Montrer que $f' \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}, \nu_1)$ et l'inégalité de Landau

$$\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \leq \|f''\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

On pourra commencer par calculer l'intégrale $\int_{T_n}^{S_n} (f')^2(x) dx$ si, de plus, $f \in C^2$.

- Exercice # 23.** a) Soit $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que $\{f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu); f \text{ étagée}\}$ est dense dans $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{T}, \mu)$. Il convient de distinguer les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.
b) On travaille dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$, avec μ mesure de Radon. Si $1 \leq p < \infty$, montrer que

$$\left\{ \sum_{j=1}^k a_j \chi_{K_j}; k \in \mathbb{N}^*, a_j \in \mathbb{R}, K_j \text{ compact}, \forall j \right\}$$

est dense dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$.

- Exercice # 24.** a) Soit $(X, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. Soient $f, g : X \rightarrow]0, \infty[$ deux fonctions mesurables telles que $f \cdot g \geq 1$. Montrer que $\int f dP \cdot \int g dP \geq 1$. Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$.

- b) Si $a_1, \dots, a_n > 0$, alors $\sum_{j=1}^n a_j \sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \geq n^2$.

Exercice # 25. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables. Nous avons $f * g(x) = g * f(x)$, au sens du théorème du changement de variables.

Exercice # 26. Soit ρ un noyau régularisant standard. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

- a) $\rho_{\varepsilon}(x) \geq 0$ si $|x| < \varepsilon$.
b) $\rho_{\varepsilon}(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$.
c) $\int \rho_{\varepsilon} = 1$.

Exercice # 27. Une approximation de l'identité est une famille $(\zeta^{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ telle que :

- i) $\zeta^{\varepsilon} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est (Lebesgue) intégrable, $\forall \varepsilon > 0$.
ii) $\int \zeta^{\varepsilon} = 1, \forall \varepsilon > 0$.
iii) Il existe une constante $M < \infty$ telle que $\int |\zeta^{\varepsilon}| \leq M, \forall \varepsilon > 0$.
iv) Pour tout $\delta > 0, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \delta)} |\zeta^{\varepsilon}| = 0$.

a) Montrer que, si $\rho \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ (avec la mesure de Lebesgue) et $\int \rho = 1$, alors $\rho_{\varepsilon}(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon), \varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n$, est une approximation de l'identité.

b) Soit $(\zeta^{\varepsilon})_{\varepsilon > 0}$ une approximation de l'identité.

- (i) Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et uniformément continue, montrer que $f * \zeta^{\varepsilon} \rightarrow f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$.
(ii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, montrer que $f * \zeta^{\varepsilon} \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.
(iii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ (avec la mesure de Lebesgue), montrer que $f * \zeta^{\varepsilon} \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Exercice # 28. Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Alors :

- a) $f * \varphi$ est défini en tout point.
 b) $f * \varphi \in C^k$.
 c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$, $\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$.
 d) Si f est un polynôme (de n variables) de degré $\leq m$, alors $f * \varphi$ est un polynôme de degré $\leq m$.

Exercice # 29. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $1 \leq p_1, \dots, p_k < \infty$. Soit $f \in \mathcal{L}^{p_1}(\Omega) \cap \dots \cap \mathcal{L}^{p_k}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_j \rightarrow f$ quand $j \rightarrow \infty$ dans $\mathcal{L}^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \dots, k$.

Exercice # 30. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C^\infty(\Omega) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ ne sont pas denses dans $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

Exercice # 31. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$. Soient p, q deux exposants conjugués. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, montrer que $f * g$ est continue.

Exercice # 32. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$. Nous nous proposons de montrer le résultat suivant : si $A, B \in \mathcal{L}_n$ satisfont $\lambda_n(A) > 0$, $\lambda_n(B) > 0$, alors l'ensemble $A + B$ contient une boule ouverte non vide.

- a) Montrer que l'on peut supposer A et B compacts.
 b) Montrer que $f := \chi_A * \chi_B$ est continue.
 c) Calculer $\int f$ et conclure.

Exercice # 33. (Résolution de l'équation de la chaleur dans le demi-espace) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$. $||$ désigne la longueur euclidienne standard dans $\mathbb{R}^n$. (Donc $|x| = \|x\|_2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.) Soit

$$K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0,$$

le noyau de la chaleur.

Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^p$. Sous réserve d'existence, soit

$$u(x, t) := f * K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K_t(x - y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t > 0.$$

- a) Montrer que :
 (i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, \infty[)$.
 (ii) u vérifie l'équation de la chaleur homogène

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[.$$

- b) Si $1 \leq p < \infty$, montrer que « $u(\cdot, 0) = f$ »[†], au sens où

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(\cdot, t) = f \text{ dans } \mathcal{L}^p.$$

- c) Si f est continue et bornée, montrer que

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

†. Noter que u n'est pas définie pour $t = 0$.

d) Si f est uniformément continue et bornée, montrer que

$$u(\cdot, t) \rightarrow f \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^n \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

Exercice # 34. (Produit de convolution de deux mesures) Soient μ, ν deux mesures boréliennes σ -finies sur $\mathbb{R}^n$. À chaque ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$, nous associons l'ensemble

$$F = F(E) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n ; x + y \in E\}.$$

- Montrer que F est borélien.
- Montrer que la formule $\xi(E) := \mu \otimes \nu(F), \forall E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$, définit une mesure borélienne ξ sur $\mathbb{R}^n$. Cette mesure est le *produit de convolution* des mesures μ et ν , noté $\mu * \nu$.
- Montrer que le produit de convolution est commutatif.
- Si les mesures boréliennes μ, ν, η sont finies, alors leur produit est associatif.
- Montrer que δ_0 (la mesure de Dirac en 0) est l'élément neutre de la convolution.
- Si μ et ν sont des mesures à densités f , respectivement g , par rapport à ν_n , montrer que $\mu * \nu$ a la densité $f * g$.
- Si μ est à densité f par rapport à ν_n , alors $\mu * \nu$ a la densité $f * \nu$, où

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) d\nu(y), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 35. (Convolution d'une fonction et d'une mesure) Cet exercice fait suite à l'exercice précédent. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, et μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, nous posons, sous réserve d'existence,

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) d\nu(y), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- Si f est Lebesgue intégrable et μ est finie, alors $f * \mu$ est définie ν_n -p. p., et est une fonction Lebesgue intégrable. Indication : théorème de Fubini.
- Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et μ est une mesure de Radon, alors $f * \mu$ est définie en tout point, et est une fonction de classe C^k .

Exercice # 36. (Équations de Cauchy) Nous considérons les *équations fonctionnelles* (de Cauchy) suivantes :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}, g(x + y) = g(x)g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Un résultat très connu affirme que, si f est une solution *continue* de (8), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement)}. \quad (10)$$

Un résultat un peu moins connu affirme que, si g est une solution *continue* de (9), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = e^{iAx}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement)}. \quad (11)$$

Ces conclusions ne sont plus vraies s'il n'y a aucune hypothèse sur f et g , mais donner des contre-exemples sort du cadre de cet enseignement. (En demander en algèbre.)

Nous nous proposons de montrer que (10) et (11) restent vraies sous l'hypothèse plus faible que f (ou g) est *Lebesgue mesurable*. Nous assumons cette hypothèse dans ce qui suit, et nous travaillons avec la mesure de Lebesgue.

Pour commencer, nous admettons la propriété qui suit, qui sera démontrée plus loin.

$$\text{Si } g \in L^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \text{ alors il existe } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } \int_{\mathbb{R}} g(y) \psi(y) dy \neq 0. \quad (12)$$

- a) Soit g solution Lebesgue mesurable de (9). En multipliant (9) par $\psi(y)$, avec ψ comme dans (12) (avec $n = 1$), et en intégrant dans la variable y , montrer que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Puis conclure grâce au préambule de l'exercice.

- b) Soit f une solution Lebesgue mesurable de (8). Soit $g := e^{if}$. En utilisant la question précédente pour g , montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et une fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ tels que

$$f(x) = Ax + 2\pi h(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

- c) (i) Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ une fonction telle que

$$h(x + y) = h(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

(aucune hypothèse de mesurabilité).

Montrer que $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Conclusion?

- d) Montrons (12). Soit $A := \{y \in \mathbb{R}; g(y) \neq 0\}$.

(i) Expliquer pourquoi $\lambda_1(A) > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $K \subset A$ un compact tel que $\nu_1(K) > 0$. Indication : la mesure de Lebesgue est une mesure de Radon.

(iii) Soit ρ un noyau régularisant. Montrer que (12) est vraie si $\psi := (\text{sgn } g \chi_K) * \rho_\varepsilon$, avec ε suffisamment petit. Indication : convergence dominée.

- e) Généraliser ce qui précède à des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}$.