

Feuille de TD # 8
Espaces de Hilbert

Cadre. Dans ce qui suit, H est un *espace de Hilbert réel* (sauf si l'énoncé précise qu'il s'agit d'un espace de Hilbert complexe), et E un *espace préhilbertien réel*. Le produit scalaire, respectivement la norme induite sur H ou E , sont notés $\langle \cdot, \cdot \rangle$, respectivement $\| \cdot \|$.

Exercice # 1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable. Montrer l'équivalence

$$0 \text{ est un point de minimum de } f \iff f'(0) \geq 0.$$

Exercice # 2. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \max\{\langle x, y \rangle; y \in E, \|y\| \leq 1\}.$$

Exercice # 3. Montrer que

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2], \forall x, y \in E.$$

Exercice # 4. On considère un espace vectoriel réel X muni d'une norme $\| \cdot \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \forall x, y \in X.$$

L'objectif est de montrer que X muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire induisant $\| \cdot \|$. Compte tenu de l'exercice précédent, posons

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2], \forall x, y \in X.$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

- Montrer que, pour tout $x, y \in X$, on a $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ et $\langle -x, y \rangle = \langle x, -y \rangle = -\langle x, y \rangle$.
- Montrer que, pour tout $x, y, z \in X$, on a $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$. (On pourra montrer d'abord l'égalité suivante : $\langle x + y, z \rangle = 2\langle y, z \rangle + \langle x - y, z \rangle$.)
- Montrer, en utilisant b), que, si $x, y \in X$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a $\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle$. En utilisant un argument de continuité, montrer que cette égalité reste encore vraie pour tout $r \in \mathbb{R}$.
- En déduire que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur X qui induit la norme $\| \cdot \|$.

Exercice # 5. (Inégalité de Bessel) Soit $(e_j)_{1 \leq j < N} \subset E$ (avec $N = 2, 3, \dots, \infty$) une famille orthonormée. Montrer l'*inégalité de Bessel*

$$\sum_{1 \leq j < N} \langle x, e_j \rangle^2 \leq \|x\|^2, \forall x \in E.$$

Exercice # 6. Soit $(e_j)_{j \geq 1} \subset H$ une suite orthonormée. Soit $(a_j)_{j \geq 1} \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\sum_{j \geq 1} a_j e_j \text{ converge} \iff \sum_{j \geq 1} a_j^2 < \infty.$$

En cas de convergence de l'une des séries, montrer que $\left\| \sum_{j \geq 1} a_j e_j \right\|^2 = \sum_{j \geq 1} a_j^2$.

Exercice # 7. Soient F et G deux sous-espaces fermés orthogonaux de H . Montrer que $F + G$ est fermé.

Exercice # 8. Soit F une partie non-vidée de H . Montrer que :

- F^\perp est un sous-espace fermé de H .
- $\overline{\text{Vect}(F)}^\perp = F^\perp$.
- $F^{\perp\perp} = \overline{\text{Vect}(F)}$. En particulier, si F est un sous-espace fermé de H , alors $F^{\perp\perp} = F$.

Exercice # 9. Soit F un sous-espace de H . Montrer l'équivalence

$$F \text{ est dense dans } H \iff F^\perp = \{0\}.$$

Exercice # 10. Soient F et G deux sous-espaces fermés de H . Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = \overline{F^\perp + G^\perp}$.

Exercice # 11. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, muni de sa norme usuelle.

a) Montrer que

$$G := \left\{ f \in H ; \int_0^1 f = 0 \right\}$$

est un sous-espace fermé de H , et déterminer G^\perp .

b) Soient $C_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compact, et

$$F := \left\{ f \in C_c(\mathbb{R}) ; \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

Montrer que $\overline{F} = G$.

c) Déterminer l'ensemble $\{g \in C_c(\mathbb{R}) ; g \in F^\perp\}$.

Exercice # 12. Soient $H = L^2(]0, 1[)$ muni de sa norme usuelle et

$$V := \left\{ f \in H ; \int_0^1 f = \int_0^{1/2} f = 0 \right\}.$$

- Montrer que V est un sous-espace fermé de H . Déterminer une base de V^\perp .
- Soit $f(x) := x$. Calculer la projection orthogonale de f sur V , puis $d(f, V)$.

Exercice # 13. Déterminer la quantité suivante

$$\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} |\sin x - a - bx|^2 dx.$$

La borne inférieure est-elle atteinte?

- Exercice # 14.** a) Déterminer la projection orthogonale sur la boule unité fermée de H .
 b) Déterminer la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par une famille orthonormée finie de H .

Exercice # 15. Soit $e_n(x) := e^{inx}, \forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in]0, 2\pi[$. Montrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 2\pi[, \mathcal{B}_{]0, 2\pi[}, 1/(2\pi)\nu_1)$.

Exercice # 16. Montrer qu'un espace préhilbertien qui a une base algébrique orthonormée infinie \mathcal{B} n'est pas complet. Indication : soit $(e_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{B}$ une suite orthonormée. Soit $x_n := \sum_{j=1}^n (1/j^2)e_j, \forall n \geq 1$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy, mais ne converge pas.

Exercice # 17. On considère $\mathbb{R}[X]$ muni de

$$\langle P, Q \rangle := \int_0^1 P(x)Q(x) dx, \forall P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.
 b) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers \exp sur $[0, 1]$.
 Montrer que cette suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
 c) En déduire sur $(\mathbb{R}[X], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ n'est pas complet.

Exercice # 18. Soit X l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{iwt} \in \mathbb{C}$ où w parcourt \mathbb{R} . Pour $f, g \in X$, soit

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t)\overline{g(t)} dt.$$

- a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur X .
 b) Vérifier que la famille $(t \mapsto e^{iwt})_{w \in \mathbb{R}}$ est orthonormée.
 c) X est-il un espace de Hilbert?

Exercice # 19. Soit V un sous-espace de H . Montrer que toute forme linéaire et continue sur V se prolonge en une forme linéaire et continue sur H .

Exercice # 20. Montrer que tout convexe fermé non-vide de H admet un unique élément de norme minimale.

Exercice # 21. Donner un exemple d'une partie A fermée de ℓ^2 , telle que $\text{dist}(0, A) = 1$, mais ne contenant pas d'élément a vérifiant $\|a\|_2 = 1$.

Exercice # 22. Soit $F \subset H$ un sous-espace fermé *non-nul*. Soit P une projection de H sur F (c'est-à-dire : P est un endomorphisme de H , $P \circ P = P$ et $P(H) = F$).

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale sur F .
2. P est continu et $\|P\| = 1$.
3. $|\langle P(x), x \rangle| \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

Exercice # 23. (Polynômes de Laguerre) Soit μ la mesure sur $[0, \infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue (c'est-à-dire $\mu(B) = \int_B e^{-x} dx, \forall B \in \mathcal{B}_{[0, \infty[}$). Les *polynômes de Laguerre* sont définis par

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n (e^{-x} x^n), \forall n \geq 0.$$

Montrer que les L_n est un polynôme, $\forall n \geq 0$, et que $(L_n)_{n \geq 0}$ est une suite orthonormée de $L^2([0, \infty[, \mathcal{B}_{[0, \infty[, \mu)$.

Exercice # 24. (Deux identités généralisées du parallélogramme) Soient $x_1, \dots, x_n \in H$.

a) Montrer que

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\|^2 + t(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 = t\|x_1\|^2 + (1-t)\|x_2\|^2, \forall t \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \|\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

c) Montrer que, si $p \neq 2$, alors il n'existe pas d'isomorphisme linéaire entre ℓ^p et ℓ^2 . (Supposer par l'absurde qu'il existe un tel isomorphisme $T : \ell^p(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ et considérer $x_i = T(e_i)$.)

Exercice # 25. Soit $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Soit $C = \{f \in H ; f \geq 0\}$. Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f \chi_{\{f \geq 0\}}, \forall f \in H$.

Exercice # 26. Soit $u \in \mathcal{L}(H)$. Montrer l'équivalence entre

1. u est une isométrie, c'est à dire $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.
2. Pour tout $x, y \in H, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. $u^*u = \text{Id}$.

(Indication : penser à l'identité de polarisation).

Exercice # 27. Si H est *séparable*, montrer que tout ensemble orthonormé $E \subset H$ est au plus dénombrable. Indication : si G est dénombrable et dense, construire une injection de E dans G en considérant des boules de rayon $1/2$.

Exercice # 28. a) Soient $x, y \in E$ tels que $\langle x, y \rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2$. Montrer que $x = y$.

b) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E vérifiant $\|x_n\| \leq 1$ et $\|y_n\| \leq 1, \forall n$.

1. On suppose que $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow 1$. Montrer que $x_n - y_n \rightarrow 0$.
2. On suppose que $\|x_n + y_n\| \rightarrow 2$. Montrer que $x_n - y_n \rightarrow 0$.

Exercice # 29. Soient H *séparable*, $(e_n)_{n \geq 0} \subset H$ une base hilbertienne et $(f_n)_{n \geq 0} \subset H$ une suite orthonormée. On suppose que

$$\sum_{n \geq 0} \|e_n - f_n\|^2 < \infty.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que $(f_n)_{n \geq 0}$ est également une base hilbertienne.

a) Soient $N \geq 0$ et $g \in H$ tel que $f_n \perp g$ pour tout $n \geq N$. Montrer l'inégalité

$$\left\| \sum_{n \geq N} \langle g, e_n \rangle e_n \right\|^2 \leq \|g\|^2 \sum_{n \geq N} \|e_n - f_n\|^2.$$

On choisit maintenant un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n \geq N} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

b) Montrer que tout vecteur g orthogonal à $e_0, e_1, \dots, e_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \dots$, est nul.

c) On considère les vecteurs

$$\eta_n = e_n - \sum_{k \geq N} \langle e_n, f_k \rangle f_k, \quad \forall n < N.$$

Montrer que tout vecteur g orthogonal à $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \dots$, est nul.

d) Soit W l'orthogonal de l'espace V engendré par les vecteurs f_N, f_{N+1}, \dots . Montrer que $\eta_n \in W$ pour tout $n < N$ et que W est engendré par $\eta_0, \dots, \eta_{N-1}$.

e) Conclure.

Exercice # 30. Soient $(e_n)_{n \geq 0}$ une suite orthonormée de H et $A := \{e_n ; n \geq 0\}$.

a) Montrer que A est fermé et borné. A est-il compact?

b) Soit (α_n) une suite de réels positifs de carrés sommables. On note K l'ensemble des éléments $x \in H$ qui s'écrivent sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ où $|a_n| \leq \alpha_n$ pour tout n . Montrer que l'ensemble K est compact.