Feuille de TD # 8

Espaces de Hilbert

Cadre. Dans ce qui suit, H est un *espace de Hilbert réel* (sauf si l'énoncé précise qu'il s'agit d'un espace de Hilbert complexe), et E un *espace préhilbertien réel*. Le produit scalaire, respectivement la norme induite sur H ou E, sont notés $\langle\ ,\ \rangle$, respectivement $\|\ \|$.

Exercice # 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable. Montrer l'équivalence

$$0 \text{ est un point de minimum de } f \iff f'(0) \geq 0.$$

Exercice # 2. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \max\{\langle x, y\rangle\,;\, y \in E, \|y\| \leq 1\}.$$

Exercice # 3. Montrer que

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right],\ \forall\, x, y \in E.$$

Exercice # 4. On considère un espace vectoriel réel X muni d'une norme $\|\ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,\ \forall\, x, y \in X.$$

L'objectif est de montrer que X muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire induisant $\|\ \|$. Compte tenu de l'exercice précédent, posons

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right],\ \forall\, x, y \in X.$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

a) Montrer que, pour tout $x, y \in X$, on a $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ et $\langle -x, y\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle$.
b) Montrer que, pour tout $x, y, z \in X$, on a $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$. (On pourra montrer d'abord l'égalité suivante : $\langle x+y, z\rangle = 2\langle y, z\rangle + \langle x-y, z\rangle$.)
c) Montrer, en utilisant b), que, si $x, y \in X$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$. En utilisant un argument de continuité, montrer que cette égalité reste encore vraie pour tout $r \in \mathbb{R}$.
d) En déduire que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien un produit scalaire sur X qui induit la norme $\|\ \|$.

Exercice # 5. (Inégalité de Bessel) Soit $(e_j)_{1\leq j<N} \subset E$ (avec $N = 2, 3, \ldots, \infty$) une famille orthonormée. Montrer l'*inégalité de Bessel*

$$\sum_{1\leq j<N} \langle x, e_j\rangle^2 \leq \|x\|^2,\ \forall\, x \in E.$$

Exercice # 6. Soit $(e_j)_{j\geq 1} \subset H$ une suite orthonormée. Soit $(a_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\sum_{j\geq 1} a_j e_j \text{ converge} \iff \sum_{j\geq 1} a_j^2 < \infty.$$

En cas de convergence de l'une des séries, montrer que $\left\|\sum_{j\geq 1} a_j e_j\right\|^2 = \sum_{j\geq 1} a_j^2$.

Exercice # 7. Soient F et G deux sous-espaces fermés orthogonaux de H. Montrer que $F + G$ est fermé.

Exercice # 8. Soit F une partie non-vide de H. Montrer que :

a) $F^\perp$ est un sous-espace fermé de H.

b) $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$.

c) $F^{\perp\perp} = \overline{\text{Vect}\,(F)}$. En particulier, si F est un sous-espace fermé de H, alors $F^{\perp\perp} = F$.

Exercice # 9. Soit F un sous-espace de H. Montrer l'équivalence

$$F \text{ est dense dans } H \iff F^\perp = \{0\}.$$

Exercice # 10. Soient F et G deux sous-espaces fermés de H. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F\cap G)^\perp = \overline{F^\perp + G^\perp}$.

Exercice # 11. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, muni de sa norme usuelle.

a) Montrer que

$$G := \left\{ f \in H\,;\, \int_0^1 f = 0 \right\}$$

est un sous-espace fermé de H, et déterminer $G^\perp$.

b) Soient $C_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compact, et

$$F := \left\{ f \in C_c(\mathbb{R})\,;\, \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

Montrer que $\overline{F} = G$.

c) Déterminer l'ensemble $\{g \in C_c(\mathbb{R})\,;\, g \in F^\perp\}$.

Exercice # 12. Soient $H = L^2(]0,1[)$ muni de sa norme usuelle et

$$V := \left\{ f \in H\,;\, \int_0^1 f = \int_0^{1/2} f = 0 \right\}.$$

a) Montrer que V est un sous-espace fermé de H. Déterminer une base de $V^\perp$.

b) Soit $f(x) := x$. Calculer la projection orthogonale de f sur V, puis $d(f, V)$.

Exercice # 13. Déterminer la quantité suivante

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} |\sin x - a - bx|^2\, dx.$$

La borne inférieure est-elle atteinte ?

Exercice # 14. a) Déterminer la projection orthogonale sur la boule unité fermée de H.

b) Déterminer la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par une famille orthonormée finie de H.

Exercice # 15. Soit $e_n(x) := e^{\imath nx}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in]0, 2\pi[$. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 2\pi[, \mathscr{B}_{]0,2\pi[}, 1/(2\pi)\nu_1)$.

Exercice # 16. Montrer qu'un espace préhilbertien qui a une base algébrique orthonormée infinie $\mathscr{B}$ n'est pas complet. Indication : soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{B}$ une suite orthonormée. Soit $x_n := \sum_{j=1}^{n}(1/j^2)e_j$, $\forall\, n \geq 1$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, mais ne converge pas.

Exercice # 17. On considère $\mathbb{R}[X]$ muni de

$$< P, Q >:= \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx,\ \forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

a) Montrer que $< , >$ est bien un produit scalaire.

b) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $\exp$ sur $[0, 1]$.

Montrer que cette suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], < , >)$.

c) En déduire sur $(\mathbb{R}[X], < , >)$ n'est pas complet.

Exercice # 18. Soit X l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{iwt} \in \mathbb{C}$ où w parcourt $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in X$, soit

$$< f, g >:= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

a) Montrer que $< , >$ définit un produit scalaire sur X.

b) Vérifier que la famille $(t \mapsto e^{\imath wt})_{w\in\mathbb{R}}$ est orthonormée.

c) X est-il un espace de Hilbert ?

Exercice # 19. Soit V un sous-espace de H. Montrer que toute forme linéaire et continue sur V se prolonge en une forme linéaire et continue sur H.

Exercice # 20. Montrer que tout convexe fermé non-vide de H admet un unique élément de norme minimale.

Exercice # 21. Donner un exemple d'une partie A fermée de ℓ^2, telle que $\operatorname{dist}(0, A) = 1$, mais ne contenant pas d'élément a vérifiant $\|a\|_2 = 1$.

Exercice # 22. Soit $F \subset H$ un sous-espace fermé *non-nul*. Soit P une projection de H sur F (c'est-à-dire : P est un endomorphisme de H, $P \circ P = P$ et $P(H) = F$).

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale sur F.
2. P est continu et $\|P\| = 1$.
3. $|\langle P(x), x\rangle| \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

Exercice # 23. (Polynômes de Laguerre) Soit μ la mesure sur $[0, \infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue (c'est-à-dire $\mu(B) = \int_B e^{-x}dx$, $\forall\, B \in \mathscr{B}_{[0,\infty[}$). Les *polynômes de Laguerre* sont définis par

$$L_n = \frac{e^x}{n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x}x^n), \forall\, n \geq 0.$$

Montrer que les L_n est un polynôme, $\forall\, n \geq 0$, et que $(L_n)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormée de $L^2([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \mu)$.

Exercice # 24. (Deux identités généralisées du parallélogramme) Soient $x_1, \dots, x_n \in H$.

a) Montrer que

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\|^2 + t(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 = t\|x_1\|^2 + (1-t)\|x_2\|^2, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

c) Montrer que, si $p \neq 2$, alors il n'existe pas d'isomorphisme linéaire entre ℓ^p et ℓ^2. (Supposer par l'absurde qu'il existe un tel isomorphisme $T : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ et considérer $x_i = T(e_i)$.)

Exercice # 25. Soit $H = L^2(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$. Soit $C = \{f \in H\,;\, f \geq 0\}$. Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f\chi_{\{f\geq 0\}}$, $\forall\, f \in H$.

Exercice # 26. Soit $u \in \mathscr{L}(H)$. Montrer l'équivalence entre

1. u est une isométrie, c'est à dire $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.
2. Pour tout $x, y \in H$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $u^*u = \mathrm{Id}$.

(Indication : penser à l'identité de polarisation).

Exercice # 27. Si H est *séparable*, montrer que tout ensemble orthonormé $E \subset H$ est au plus dénombrable. Indication : si G est dénombrable et dense, construire une injection de E dans G en considérant des boules de rayon $1/2$.

Exercice # 28. a) Soient $x, y \in E$ tels que $\langle x, y\rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2$. Montrer que $x = y$.

b) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E vérifiant $\|x_n\| \leq 1$ et $\|y_n\| \leq 1$, $\forall\, n$.

1. On suppose que $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.
2. On suppose que $\|x_n + y_n\| \to 2$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.

Exercice # 29. Soient H *séparable*, $(e_n)_{n\geq 0} \subset H$ une base hilbertienne et $(f_n)_{n\geq 0} \subset H$ une suite orthonormée. On suppose que

$$\sum_{n\geq 0} \|e_n - f_n\|^2 < \infty.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ est également une base hilbertienne.

a) Soient $N \geq 0$ et $g \in H$ tel que $f_n \perp g$ pour tout $n \geq N$. Montrer l'inégalité

$$\left\|\sum_{n\geq N} \langle g, e_n\rangle e_n\right\|^2 \leq \|g\|^2 \sum_{n\geq N} \|e_n - f_n\|^2.$$

On choisit maintenant un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n\geq N} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

b) Montrer que tout vecteur g orthogonal à $e_0, e_1, \dots, e_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \dots$, est nul.

c) On considère les vecteurs

$$\eta_n = e_n - \sum_{k\geq N} < e_n, f_k f_k, \; \forall\, n < N.$$

Montrer que tout vecteur g orthogonal à $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \ldots$, est nul.

d) Soit W l'orthogonal de l'espace V engendré par les vecteurs $f_N, f_{N+1}, \ldots$ Montrer que $\eta_n \in W$ pour tout $n < N$ et que W est engendré par $\eta_0, \ldots, \eta_{N-1}$.

e) Conclure.

Exercice # 30. Soient $(e_n)_{n\geq 0}$ une suite orthonormée de H et $A := \{e_n \,;\, n \geq 0\}$.

a) Montrer que A est fermé et borné. A est-il compact ?

b) Soit (α_n) une suite de réels positifs de carrés sommables. On note K l'ensemble des éléments $x \in H$ qui s'écrivent sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ où $|a_n| \leq \alpha_n$ pour tout n. Montrer que l'ensemble K est compact.