Exo 9 [F4]

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] & K \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H' & K' \arrow[l, "T_1^*"'] \\ H \arrow[u, "\Phi_H"] & K \arrow[l, "T_2^*"] \arrow[u, "\Phi_K"'] \end{tikzcd}$$

$$T^* y' = y \circ T$$

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dashed, "T^* y'"'] & K \arrow[d, "y'"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$a \in K$

$$\langle T^* a, x \rangle = (a, Tx), \ \forall x \in H$$

$T^* a =$ le seul $b \in H$ tq

$$\langle b, x \rangle = (a, Tx), \ \forall x \in H$$

Mq

$$\Phi_H \circ T_2^* = T_1^* \circ \Phi_K \quad (1)$$

Preuve de (1)

$$\Phi_H \circ T_2^*(a) = \Phi_H(\underbrace{T_2^*(a)}_{=b}) = [x \mapsto \langle x, b \rangle]$$

$$= x \longmapsto (a, Tx)$$

$$T_1^* \circ \Phi_K(a) = T_1^*[y \longmapsto (y, a)]$$

$$= [y \longmapsto (y, a)] \circ T = x \longmapsto (Tx, a)$$

Autre cas fréquent

$$L^{p_1}(X_1) \xrightarrow{T} L^{p_2}(X_2) \qquad 1 < p_1, p_2 < \infty$$

$$L^{q_1}(X_1) \xleftarrow{T_2^*} L^{q_2}(X_2)$$

On part de $f \in L^{q_2}$. $T^* f \in L^{q_1}$ = la seule fonction $h \in L^{q_1}$ tq

$$\int_{X_1} h\, g = \underline{\int_{X_2} (Tg) f}, \quad \forall g \in L^{p_1}$$

Exo 10

1.

$$T \in E'$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] & \mathbb{R} \\ E' & \mathbb{R} \arrow[l, "T^*"'] \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

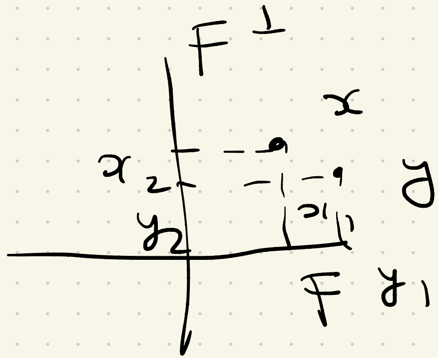
$a \in \mathbb{R} \;\underline{\simeq}\; \varphi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \varphi_a(t) = at, \; \forall t \in \mathbb{R}$

$$\underline{T^*_2 a} = T^*_1 \varphi_a = \varphi_a \circ T = [E \ni \underline{x} \mapsto \varphi_a(Tx) = \underline{aTx}]$$

$$= \underline{aT}$$

$$\boxed{T^* a = aT, \; \forall a \in \mathbb{R}}$$

2.



Si $x, y \in H$

$\langle T^* y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$

$$\underline{\langle y, P_F x\rangle} = \langle y_1 + y_2, x_1\rangle = \langle y_1, x_1\rangle$$

$$= \langle y_1, x_1 + x_2\rangle = \langle y_1, x\rangle = \underline{\langle P_F y, x\rangle}$$

$\perp$ $\perp$

D'où $P_F^* y = P_F y$ càd $P_F^* = P_F$. $\square$

3. $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ BON, $A = (a_{jk})_{1 \le j, k \le n}$

la matrice de T ds $\mathcal{B}$.

Si $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle y, Tx \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} y_j e_j , \sum_{j=1}^{n} x_j T e_j \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{\cancelto{l}{j}=1}^{n} y_{\cancelto{l}{j}} e_{\cancelto{l}{j}} , \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk} e_k \right\rangle$$

$$= \sum_{j,k,l} y_l x_j a_{jk} \underbrace{\langle e_l , e_k \rangle}_{= 0 \text{ sauf si } l = k}$$

$$= \sum_{j,k} y_k x_j a_{jk} = \langle \sum_j \underbrace{\sum_k a_{jk} y_k e_j}_{T^* y}, x \rangle$$

$$= \langle T^* y, x \rangle$$

Dc $T^* y = \sum_k y_k \left(\sum_j a_{jk} e_j \right)$

T^* de matrice $(a_{kj})_{1 \leq j,k \leq n}$ $= {}^t A.$

4. $L^p(X) \xrightarrow{T} L^p(X) \quad 1 \leq p < \infty$

$$T\underbrace{f}_{\text{classe}} = \underbrace{\underbrace{h}_{\text{fonction}}}_{\text{classe}} f \quad \text{avec} \quad h \in \mathcal{L}^\infty$$

Clairement,
* T linéaire
* T continu $\left(\|Tf\|_p \leq \|h\|_\infty \|f\|_p, \ \forall f \in L^p \right)$

$$L^q(X) \xleftarrow{\ T^*\ } L^q(X) \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

On part de $f \in L^q$, $g \in L^p$

(Bien définie) $$\int_X \underbrace{\underbrace{g(y)}_{\in L^q} \underbrace{(Tf)(y)}_{\in L^p}}_{\in L^1 \text{ (Hölder)}} \, d\mu(y) =$$

$$= \int_X g(y)\, h(y)\, f(y)\, d\mu(y) = \int_X \overbrace{[h(y) g(y)]}^{\in L^q} f(y) \, d\mu(y)$$

D'où $T^*_{\cancel{2}}\, g = hg$, $\forall g \in L^q$.

<u>Fonctions partielles</u> (en général : $\to \mathbb{R}$)

<u>Tonelli</u> $f : X \times Y \to [0,\infty]$, mesurable

$(X, \mathcal{T}, \mu)$ μ, ν σ-finies

$(Y, \mathcal{S}, \nu)$ $\Rightarrow \exists\ \mu \otimes \nu$

$$g(x) := \int_Y f(x,y)\, d\nu(y) \qquad g : X \to [0,\infty]$$

* g définie en tout point (p.-p. ∞)
* g mesurable
* $\int_X g(x)\, d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)\, d\mu \otimes \nu(x,y)$

__Thm Fubini__ Hyp $f : X \times Y \to \mathbb{R}$

$$\int_{X \times Y} |f(x,y)| \, d\mu \otimes \nu(x,y)$$

Soit $g(x) := \begin{cases} \int_Y f(x,y)\, d\nu(y), & \text{si } \exists \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

$\ast$ $\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ $\exists$ (et est finie) pour presque tout x

* g intégrable

* $$\int_X g(x)\,d\mu(x) = \int_{X\times Y} f(x,y)\,d\mu\otimes\nu(x,y).$$

Autre situation :

On suppose, * f mesurable : $X\times Y \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{* Pour presque tout } x, \quad \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y) < \infty.}$$

On peut enlever, mais pas intéressant

Alors : $g(x) := \begin{cases} \int_Y f(x,y)\, d\nu(y), & \text{si } \exists \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

est mesurable et

$$|g(x)| \leq \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y), \quad \underline{\underline{\forall x}} \qquad (1)$$

Cas particulier :

Si $$h(x) := \int_Y |f(x,y)|\, d\nu(y)$$

(qui est mesurable, par Tonelli)

$h \in \mathcal{L}^p$ pour un p

---

5. (a) $$L^2(Y) \xrightarrow{T\ (?)} L^2(X)$$

$\mathcal{S}, \nu$ $\qquad$ $\mathcal{T}, \mu$

$$(Tf)(x) = \int_Y K(x,y)\, f(y)\, d\nu(y), \quad \forall ! \; x \in X \quad p.p.$$

(on verra que Tf est définie p.p.)

$K \in L^2(X \times Y)$

<u>Stratégie</u> pour mq $\quad Tf \in L^2$

$$x \longmapsto \int |K(x,y)|\, |f(y)|\, d\nu(y) \in L^2$$

D'où (selon notre discussion) Tf définie p.p. comme une $\int$, mesurable, et dans $\mathcal{L}^2$

(grâce à (1))

Digression : formule de dualité

Rappel : (du L3) : Si $1 \leq p < \infty$.

Si $f \in L^p \Rightarrow \|f\|_p = \sup\{\int fg \,;\, g \in L^q, \|g\|_q \leq 1\}$

Variante : Si $f \geq 0$ mesurable, alors (sans supposer a priori $f \in \mathcal{L}^p$)

$$\|f\|_p = \sup\left\{ \int fg \,;\, g \in \mathcal{L}^q, \|g\|_q \leq 1, g \geq 0 \right\}$$

[Dém : reprendre la preuve du poly avec $f \geq 0$]

Soit $g \in \mathcal{L}^2$, $g \geq 0$.

On a

$$\int_X \left(\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|\, d\nu(y) \right) g(x)\, d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{X\times Y} |K(x,y)|\,|f(y)|\, g(x)\, d\mu\otimes\nu(x,y)$$

$$\overset{C-S}{\leq} \left[\int_{X\times Y} [k(x,y)]^2 \, d\mu\otimes\nu(x,y) \int_{X\times Y} f^2(y) g^2(x) \, d\mu\otimes\nu(x,y) \right]^{1/2}$$

Tonelli

$$= \|k\|_{L^2(X\times Y)} \left[\int_Y f^2(y)\, d\nu(y) \int_X g^2(x)\, d\mu(x) \right]^{1/2}$$

$$= \|k\|_{L^2(X\times Y)} \|f\|_{L^2(Y)} \|g\|_{L^2(X)}$$

$$\int_X \left[\int_Y |k(x,y)| \, |f(y)| \, d\nu(y) \right] g(x) \, d\mu(x) \leq$$

D'où : $\quad x \longmapsto \int_Y |k(x,y)|\,|f(y)|\,d\nu(y) \in \mathcal{L}^2(X)$

et sa norme L^2 est $\leq \|K\|_2 \, \|f\|_2$

D'où : $\quad T_k f$ est $\begin{cases} \text{bien défini p.p.} \\ \text{mesurable e} \\ \|T_k f\|_2 \leq \|K\|_2 \, \|f\|_2 \end{cases}$

D'où

T_k est linéaire, continu et $\|T_k\| \leq \|K\|_2$.

Vrai ? $\widehat{T_k f_1} + \widehat{T_k f_2} = \widehat{T_k(f_1+f_2)}$

$$L^2(Y) \xleftarrow{(T_k)^*_2 = T_L} L^2(X)$$

Soient $g \in L^2(X)$

$$\int_X g(x)\, Tf(x)\, d\mu(x)$$

$$= \int_X g(x) \left(\int_Y K(x,y) f(y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

$$= \int_Y f(y) \underbrace{\left(\int_X K(x,y) g(x)\, d\mu(x) \right)}_{(T_K)^* g\,(y)} d\nu(y)$$

Fubini, qui s'applique cf début de la preuve

On a donc $(T_K)^* = T_L$, où

$L(y,x) := K(x,y)$ $\qquad L : Y \times X \to \mathbb{R}$

5. (b) $L^p \xrightarrow{T_K} L^p$ (Exo maison $p = 1$)

Preuve si $1 < p < \infty$

$f \in L^p$, $g \in L^q$, $g \geq 0$

$$\int_X \left(\int_Y |K(x,y)||f(y)| \, d\nu(y) \right) g(x) \, d\mu(x)$$

$$= \int_X \left(\int_Y \underbrace{|K(x,y)|^{1/p} |f(y)|}_{p} \; \underbrace{|K(x,y)|^{1/q}}_{q} \, d\nu(y) \right) g(x) \, d\mu(x)$$

Hölder

$$\leq \int_X \Big[\underbrace{\int_Y |k(x,y)|\, d\nu(y)}_{\leq M_1,\ \forall x}\Big]^{1/p} \times$$

$$\Big(\int_Y |k(x,y)|\ |f|^p(y)\, d\nu(y)\Big)^{1/p} g(x)\, d\mu(x)$$

$$\leq (M_1)^{1/q} \int_X \underbrace{\Big(\int_Y |k(x,y)|\,|f|^p(y)\, d\nu(y)\Big)^{1/p}}_{p} \underbrace{g(x)}_{q}\, d\mu(x)$$

Hölder

$$\leq (M_1)^{1/q} \left(\int_X \left(\int_Y |k(x,y)|\, |f|^p(y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \right)^{1/p}$$

$$\times \underbrace{\left(\int_X g^q(x)\, d\mu(x) \right)^{1/q}}_{= \|g\|_q}$$

Tonelli:

$$= (M_1)^{1/q} \|g\|_q \left[\int_Y \Big(\underbrace{\int_X k(x,y)\, d\mu(x)}_{\leq M_2,\ \forall y} \Big) |f|^p(y)\, d\nu(y) \right]^{1/p}$$

$$\leq (M_1)^{1/q} (M_2)^{1/p} \|g\|_q \|f\|_p$$

$$\int_X \left(\int_Y |K(x,y)|\,|f(y)|\,d\nu(y) \right) g(x)\,d\mu(x) \leq$$

Conclusions : si $f \in L^p$ $T_K f \in L^p$ et

$$\|T_K f\|_p \leq (M_1)^{1/q} (M_2)^{1/p} \|f\|_p$$

D'où T_K lin + cont $L^p \to L^p$, de norme $\leq (M_1)^{1/q}(M_2)^{1/p}$

À la fin, $(T_K)^* = T_L$.

Si $E = F = \ell^r$

$$K = (k_{m,n})_{m,n\geq 0}$$

$$T_K (a_n)_{n\geq 0} = \left(\sum_n k_{m,n}\, a_n\right)_{m\geq 0}$$

Hyp :

$$M_1 := \sup_m \sum_n |k_{m,n}| < \infty$$

$$M_2 := \sup_n \sum_m |k_{m,n}| < \infty$$

Cond : $T_k \in \mathcal{L}(\ell^p)$

$$(T_k)^* = T_L \,, \text{ où } \; l_{m,n} = k_{n,m}$$

càd.

$$T_L (a_n)_{n\geq 0} = \left(\sum_n k_{n,m}\, a_n\right)_{m\geq 0}$$

6.
$$\ell^2 \xrightarrow{\quad T \quad} \ell^2$$

$$(b_0, b_1, b_2, \ldots)$$

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \xrightarrow{\quad T \quad} (0, a_0, a_1, \ldots)$$

Clair : T linéaire, $\|T\| \leq 1$, T continue

$$\ell^2 \xleftarrow{T_2^*} \ell^2$$

$\langle y, Tx \rangle$ on trouve z $\langle z, x \rangle$. Alors $T^* y = z$

Si $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0} \in \ell^2$

$$\langle (b_n)_{n\geq 0}, T(a_n)_{n\geq 0} \rangle = \sum_{n\geq 0} a_n b_{n+1}$$

$$\Rightarrow \quad T(b_n)_{n\geq 0} = (b_1, b_2, b_3 \text{ — })$$

$\boxed{\text{Exo 11}}$

$$E \xrightarrow{\;U = T|_E\;} F := U(E) \quad \text{isométrie bijective}$$

$$\oplus$$

$$E^{\perp} \xrightarrow{\;T = 0\;}$$

Soient $x, y \in H$. On écrit

$x = x_1 + x_2$, $x_1 \in E$, $x_2 \in E^{\perp}$

$y = y_1 + y_2$, $y_1 \in F$, $y_2 \in F^{\perp}$

$$\langle y, Tx \rangle = \langle y_1 + y_2, \underbrace{Tx_1}_{= Ux_1} + \underbrace{Tx_2}_{= 0} \rangle = \langle y_1 + \underbrace{y_2}_{\in F^{\perp}}, \underbrace{Ux_1}_{\in F} \rangle$$

$$= \langle y_1, U x_1 \rangle = \langle \underbrace{U}_{} U^{-1} y_1, \underbrace{U}_{} x_1 \rangle$$

isométrie

$$= \langle \underbrace{U^{-1} y_1}_{\in E}, x_1 \rangle$$

$$= \langle U^{-1} y_1, x_1 + \underbrace{x_2}_{\in E^{\perp}} \rangle = \underline{\langle U^{-1} y_1, x \rangle}$$

$$= \langle U^{-1} P_F y, x \rangle = \underline{\langle U^{-1} P_{T(E)} y, x \rangle}$$

Dc $T_2^* = U^{-1} \circ P_{T(E)}$.

Exo 12

$1 \leq p < \infty$

$$\begin{tikzcd} \ell^p \arrow[r, "T"] \arrow[dr, dashed, "\varphi_{e^n} \circ T"'] & \ell^p \arrow[d, "\varphi_e"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\varphi_{e^n}((a_m))_{m\geq 0} = a_n$$

$$|a_n| \leq \|(a_m)_{m\geq 0}\|_p \quad , \forall$$

Càd φ_{e^n} est une forme linéaire continue sur ℓ^p

$$\varphi_{e^n} \circ T : \ell^p \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{linéaire + continue}$$

$$\varphi_{e^n} \circ T \in (\ell^p)^* \simeq \ell^q$$

On a donc : $\exists$ une suite $(b_{m,n})_{m \geq 0} \in \ell^q$ tq la n^e coordonnée de $T(a_m)_{m \geq 0}$ soit donnée par

$$\sum_m b_{m,n}\, a_m \qquad (\forall n \geq 0)$$

Càd $$T\,(a_m)_{m\geq 0} = \Big(\sum_m b_{m,n}\, a_m\Big)_{n\geq 0}$$

(propr. 3)

On vient de montrer la propr. 1

Pour la propr. 2 : On regarde

$$T\underbrace{e^m}_{} = (b_{m,n})_{n\geq 0} \in \ell^p$$ (d'où la propr. 2)

$$= (0, \text{—}, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ m^e \text{ position}}}{1}, 0, \text{—}, 0 \text{—})$$

$e^m \in \ell^p$

$$T_2^* e^j \triangleq T_1^* \varphi_{e^j} = \varphi_{e^j} \circ T$$

$= $ la j^e coordonnée de T ~~au~~ $(b_{m,j})_{m \geq 0}$

Dc

$$T_2^* e^j = (b_{m,j})_{m \geq 0}$$

$\boxed{\begin{array}{c} 1 < p < \infty \\ (\text{pas } p = 1) \end{array}}$

Soit $(c_n)_{n \geq 0} \in \ell^q$

On a

$$T_2^* (c_n)_{n \geq 0} \underset{\uparrow \text{ car } q < \infty}{=} T_2^* \lim_{N \to \infty} (c_0, \ldots, c_N, 0, \ldots)$$

$$= \lim_{N\to\infty} T_2^*(c_0, \dots, c_N, 0, \dots, 0, \dots)$$

T_2^* continues

$$= \lim_{N\to\infty} T_2^*\left(\sum_{j=0}^{N} c_j e^j\right)$$

$$\underset{\text{linéarité}}{=} \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N} c_j T_2^* e^j =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{N} c_j \cdot b_{m,j}\right)_{m\geq 0}$$

je sais que cette limite existe ds ℓ^q

$$= \Big(\sum_{j\geq 0} b_{m,j}\, c_j \Big)_{m\geq 0}$$

$$T^* (c_n)_{n\geq 0} = \Big(\sum_{n} b_{m,n}\, c_n \Big)_{m\geq 0}.$$

Exo 13.

Lemme : H Hilbert ,

$(x_n) \in H$ suite <u>orthogonale</u>.

Alors $\sum_n x_n$ converge $\iff \sum \|x_n\|^2 < \infty$

et ds ce cas : $\|\sum_n x_n\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$.

<u>Dém.</u> " $\Leftarrow$ " Si $\sum \|x_n\|^2 < \infty$

$y_n := \sum_{j \leq n} x_j$ (But : (y_n) CV)

Si $m > n$

$$\| y_m - y_n \|^2 = \Big\| \sum_{n < j \leq m} x_j \Big\|^2 \underset{\text{Pyth}}{=} \sum_{n < j \leq m} \|x_j\|^2$$

$$\xrightarrow{n, m \to \infty} 0$$

D'où $(y_n)_n$ de Cauchy $\Big\}$ $\Rightarrow (y_n)_n$ CV
H Hilbert

et :

$$\Big\| \sum_n x_n \Big\|^2 = \Big\| \lim_n y_n \Big\|^2 = \lim_n \|y_n\|^2$$

$$\underset{\text{Pyth.}}{=} \lim_n \sum_{j\leq n} \|x_j\|^2 = \sum \|x_n\|^2$$

"$\Longrightarrow$" On a

de ce qui précède

$$\|\sum_n x_n\|^2 = \sum_n \|x_n\|^2$$

D'où $\sum \|a_n\|^2 < \infty$. $\square$

Soit $C<\infty$ tq $|a_n| \leq C$, $\forall n$.

1. On a $\sum \| \underbrace{a_n \langle x, f_n\rangle f_n}_{\text{suite orthogonale}} \|^2$

$$= \sum \underbrace{(a_n)^2}\langle x, f_n\rangle^2 \leq C^2 \sum_n \langle x, f_n\rangle^2$$

$$\leq C^2$$

$$\leq C^2 \|x\|^2$$

D'où Tx bien défini

et $\|Tx\| \leq C\|a\|$.

T linéaire, continu)
clair de norme $\leq C$.

Inégalité de Bessel
(f_n) orthonormée
$\Rightarrow \sum_n \langle x, f_n\rangle^2 \leq \|x\|^2$

Soient $x, y \in H$

2. On a $\langle y, Tx \rangle$

$$= \langle y, \sum_n a_n \langle x, f_n \rangle f_n \rangle$$

$$= \sum_n a_n \langle x, f_n \rangle \langle y, f_n \rangle$$

linéarité + continuité du p.s.

$$= \langle Ty, x \rangle$$

D'où $T^*_2 y = Ty$, càd $T^* = T$. $\square$

Exo 15

1. suit du lemme de l'exo 14.

2. $$P_{H_m}\Big(\sum_{n\geq 0} x_n\Big) = P_{H_m}\Big(\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n\Big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \underbrace{P_{H_m}\Big(\sum_{n=0}^{N} x_n\Big)}_{\text{si } N \geq m,\ \text{la projection est } x_m,} = x_m.$$

car $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x_n = x_m + \underbrace{\sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{N} x_n}_{\in H_m^\perp}$

$\in H_m$

Exo 16

Rappel :

$$A \xrightarrow{\varphi} B$$

injective

B a.p.d.

$\Rightarrow$ $\boxed{A \text{ a.p.d.}}$

$$A \xrightarrow{\Phi} B$$

Surjective

A a.p.d.

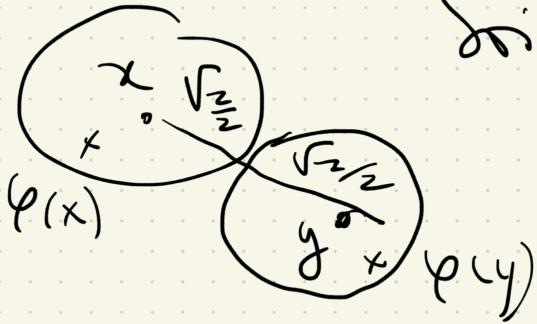
$\Rightarrow$ B a.p.d.

$\mathcal{F}$ orthonormée

"A"

Soit $B \subset H$ B a.p.d., B dense dans H

"B"



Soient $x, y \in H$, $x \neq y$

Pyth $\|x-y\|^2 = \underbrace{\|x\|^2}_{=1} + \underbrace{\|y\|^2}_{=1} = 2$

$$\Rightarrow B(x, \sqrt{2}/2) \cap B(y, \sqrt{2}/2) = \emptyset$$

$\forall x \in \mathcal{F}$, $\exists\ \varphi(x) \in B$ tq $\varphi(x) \in B(x, \sqrt{2}/2)$

On a $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ si $x \neq y$

Donc $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} B$ $\quad x \mapsto \varphi(x)$ injective

$\Rightarrow \mathcal{F}$ a.p.d. $\qquad \square$

Exo 17

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\omega t}\,dt = \quad \downarrow \text{Si } \omega \neq 0,\ \omega \in \mathbb{R}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2T}}_{\substack{\text{cste}\\ \downarrow\\ \infty}}\ \underbrace{\frac{1}{i\omega}}_{\text{cste}} \Big(\underbrace{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}_{\text{borné}}\Big) = 0$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i\omega t}\,dt = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega \neq 0 \\ 1, & \text{si } \omega = 0 \end{cases} \quad (1)$$

1. Séparation :

$$f(t) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{i w_j t} \quad \text{avec } w_j \text{ distincts}$$
$$\lambda_j \in \mathbb{C}$$

Si

$$0 = \langle f, f \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \lambda_j \overline{\lambda_l} e^{i(w_j - w_l)t} dt$$

$$= \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j|^2$$

$$\Rightarrow \lambda_j = 0, \forall j \Rightarrow f = 0 \qquad \square$$

2. Exercice (on utilise (1))

3. <u>H n'est pas complet.</u> <u>Par l'absurde.</u>

$$\sum_{n \geq 1} \underbrace{\frac{1}{n} e^{int}}$$

famille orthogonale

et $\sum_{n\geq 1} \|\frac{1}{n} e^{int}\|^2 = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$

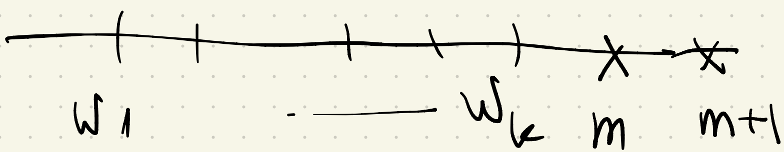
H Hilbert $\Leftrightarrow$ $\sum$ converge dans H

càd $\exists k$, $\exists w_1, \ldots, w_k \in \mathbb{R}$

$\exists \lambda_j \in \mathbb{C}$ tq

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} e^{int} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{i w_j t}$$

Càd : $$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e^{int} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{i\omega_j t} \right\|^2 = 0$$



Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tq $\omega_j \leq m$, $\forall j$

Si $N > m \Rightarrow$

$$\left\| t \mapsto \left[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e^{int} - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{i w_j t} \right] \right\|^2 \geq \underbrace{\frac{1}{(m+1)^2}}_{\text{cste}} > 0$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle N \to \infty}$$

$$0$$

Exo 19

Cadre : $I \subset \mathbb{R}$ intervalle

H Hilbert $\subset \{ \widehat{f : I \to \mathbb{R}} \ /_{\mathcal{C}} \}$

(i), (ii) : $\quad P \in \mathbb{R}[X]$

$I \ni x \longmapsto P(x) \quad \in H$

$x \longmapsto P(x) = 0$ (en tant qu'élément de H)

$\Rightarrow P = 0$

(iii) $\mathbb{R}[X]$ dense ds H

$\widehat{\{x \mapsto P(x)\ ;\ P \in \mathbb{R}[X]\}}$ dense de H

1. Mq si

$(P_n) \subset \mathbb{R}[X]$

$$\begin{cases} \deg P_n = n \\ \|P_n\| = 1 \\ \quad \uparrow \\ \quad \text{de } H \\ \langle P_n, P_m \rangle = 0 \text{ si } n \neq m \end{cases} \Rightarrow (P_n) \text{ base hilbertienne de } H$$

Dém. La seule chose à montrer est que

$$\begin{cases} \forall f \in H & \exists n \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists \lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\| f - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j f_j \| < \varepsilon.$$

$\exists P \in R[X]$ tq $\| f - P \| < \varepsilon$

$\exists n$ tq $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Or $\{ f_0, \dots, f_n \}$ = base de $\mathbb{R}_n[X]$

$\Rightarrow \exists \lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tq $P = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j$

$\Rightarrow \| f - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j \| < \varepsilon$. $\square$

3. $\underline{I = [0, \infty[\ , \mathcal{B}_{[0,\infty[}}$

$\underline{\mu = e^{-x} dx}$ càd

$$\int_0^\infty f \, d\mu = \int_0^\infty f(x) e^{-x} dx$$

$$Q_n(x) := \beta_n \, e^x \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right] \quad , \beta_n > 0 \text{ à débattre}$$

Mq base hilbertienne de L^2

<u>Étape 1.</u> Q_n polynôme de degré n

Plus généralement : si R polynôme

$$e^x \frac{d^k}{dx^k}\left[R(x) e^{-x}\right] = \text{polynôme}$$

du m̂ degré que celui de R

formule de Leibniz:

$$e^x \frac{d^k}{dx^k}\left[R(x)e^{-x}\right] = e^x \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \times \frac{d^j}{dx^j} R(x) \underbrace{\frac{d^{k-j}}{dx^{k-j}} \left(e^{-x}\right)}_{(-1)^{k-j} e^{-x}}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} R^{(j)}(x)$$ = polynôme

du m̂ degré que celui de R

Etape 2. les "polynômes" sont ds L^2

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

$$\int_0^{\infty} [P(x)]^2 e^{-x} \, dx = IG = IL < \infty$$

par croissances comparée

Étape 3. On peut identifier polynôme et fonction polynomiale

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

Si $\int_0^{\infty} \underbrace{[P(x)]^2 e^{-x}}_{\text{continue } \geq 0} dx = 0 \Rightarrow P(x) = 0,$
$\forall x \geq 0$

$\Rightarrow P = 0$

<u>Étape 4</u>: "$\mathbb{R}[X]$" dense dans $\overset{\circ}{L}{}^2$.

Soit $f \in \mathcal{L}^2$ tq

$F \subset H$ s.e.v.

F dense $\Leftrightarrow$

$F^{\perp} = \{0\}$

$$(1)\quad \int_0^\infty f(x)P(x)e^{-x}\,dx = 0,\quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$$

But : $f = 0$ p.p.

On a $f \in \mathcal{L}^2$:

$$\int_0^\infty [f(x)]^2 e^{-x}\,dx < \infty \Rightarrow \int_0^\infty \Big[\underbrace{f(x)e^{-\frac{x}{2}}}_{:= g(x)}\Big]^2 dx < \infty$$

$$\Rightarrow g \in \mathcal{L}^2([0,\infty[, \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \lambda_1)$$

Lebesgue

De (1), on a

$$\int_0^\infty P(x) g(x) \, e^{-\frac{x}{2}} dx = 0, \quad \forall P \in \mathbb{R}[X]$$

En particulier: $g \in \mathcal{L}^2([0,\infty[, \mathcal{B}_{[0,\infty[}, \lambda_1)$

$$\int_0^\infty t^n g(t) e^{-\frac{t}{2}} dt = 0, \quad \forall n \geq 0$$

(Exo 18, 2 : $a := \frac{1}{2}$)

$\Longrightarrow \quad g = 0$ p.p. $\quad \Rightarrow \quad f = 0$ p.p.

On est ds le cadre de la question 1.

✓ Hyp (i) – (iii)

✓ $\deg Q_n = n$, $\forall n$

✓ $\|Q_n\| = 1$, $\forall n$

Pour conclure : il reste à mq

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = 0, \quad \forall n \neq m.$$

IPP : Cadre plus général

$$e^{x} \frac{d^k}{dx^k}\left[x^n e^{-x}\right] = \text{multiple de } x^{n-k}$$

si $k<n$

donc s'annule en 0

Lemme. Si $k \leq n$ et $U \in \mathbb{R}[X]$

alors $$\int_0^{\infty} U(x) \frac{d^k}{dx^k}\left[x^n e^{-x}\right] dx =$$

$$= (-1)^k \int_0^{\infty} U^{(k)}(x)\, x^n e^{-x}\, dx$$

<u>Dém.</u> Par réc sur k $\underline{\underline{\leq n}}$

$k = 0$ évident

$k \to k+1$ On a $\underline{\underline{k < n}}$

$$\int_0^{\infty} U(x) \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} \left[x^n e^{-x}\right] dx =$$

$$\int_0^\infty U(x)\,\frac{d}{dx}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(x^n e^{-x}\right)\right] dx =$$

$$\underbrace{\left[U(x)\,\frac{d^k}{dx^k}\left(x^n e^{-x}\right)\right]_0^\infty}_{=0} - \int_0^\infty U'(x)\,\frac{d^k}{dx^k}\left(x^n e^{-x}\right) dx$$

Croissances comparées

$$= -\int_0^\infty U'(x)\,\frac{d^k}{dx^k}\left[x^n e^{-x}\right] dx = (-1)^{k+1}\int_0^\infty U^{(k+1)}(x)\, x^n e^{-x}\, dx$$

HR appliquée à U'

On applique le lemme à Q_m avec $m<n$

$$\langle Q_m, Q_n \rangle = \int_0^\infty Q_m(x) \underbrace{Q_n(x) e^{-x}}_{= \beta_n \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right]} dx$$

$$= \beta_n \int_0^\infty Q_m(x) \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right] dx \underset{\text{lemme}}{=}$$

$$= (-1)^n \beta_n \int_0^{\infty} \underbrace{Q_m^{(n)}(x)}_{=0 \text{ car } \deg Q_m = m < n} x^n e^{-x} dx = 0. \quad \square$$

Exo 24.

$$\forall x, y \in H$$

$$a(x,y) = \langle x, y \rangle + \langle Tx, y \rangle$$

$$= \langle (Id + T)x, y \rangle$$

Rappel Lax-Milgram

H Hilbert réel

$a : H \times H \to \mathbb{R}$

Hyp. a bilinéaire $\longleftrightarrow$ exo

$$|a(x,y)| \leq M \|x\| \|y\| \ , \forall x,y \in H$$

$M < \infty$

$$a(x,x) \geq C \|x\|^2 \ , \forall x \in H$$

$C > 0$

Forme 1. $\forall v \in H \ , \exists! \ x \in H$

tq $\quad a(x,y) = \langle v, y \rangle , \ \forall y \in H$

$$\uparrow \qquad x = A^{-1} v$$

<u>Forme 2.</u> $\exists!\, A \in \mathcal{L}(H)$ tq

$$a(x,y) = \langle Ax, y\rangle, \quad \forall x, y \in H$$

Cet A est bijectif

$$|a(x,y)| = |\langle (Id+T)x, y\rangle|$$

$$\leq \|(Id+T)x\| \, \|y\|$$

$$\leq \underbrace{\|Id+T\|}_{M<\infty} \|x\| \, \|y\|$$

$$a(x,x) = \langle (Id+T)x, x\rangle = \langle x, x\rangle + \underbrace{\langle Tx, x\rangle}_{\geqslant 0} \geq \|x\|^2$$

$$\boxed{C=1}$$

Exo 25

$$a(x,y) := \langle (Id + T^*T)x, y\rangle$$

$$|a(x,y)| \leq \|\underbrace{Id + T^*T}_{\text{lin+cont}}\| \, \|x\| \, \|y\|$$

$$< \infty$$

$$a(x,x) = \langle x, x \rangle + \langle T^* T x, x \rangle$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Rappel} \\ \langle T^* y, x \rangle = \langle y, T x \rangle \end{array}}$$

$$= \langle x, x \rangle + \underbrace{\langle T x, T x \rangle}_{\geq 0} \geq \langle x, x \rangle$$

$$\boxed{C = 1}$$

Exo 26

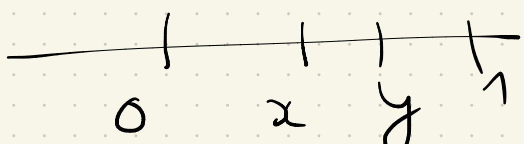
$Tf(x)$ bien défini (et fini)

car si $f \in \mathcal{L}^2([0,1]) \Rightarrow$

$f \in \mathcal{L}^2([0,x]) \subset \mathcal{L}^1([0,x])$

car $\lambda_1([0,x]) < \infty$

$\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt \ \exists$ et est finie

1. 

On a $\underline{|Tf(y) - Tf(x)|} = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right|$

$$\underset{CS}{\leq} \left[\int_x^y f^2(t)\,dt \right]^{1/2} \left(\int_x^y 1\,dt \right)^{1/2}$$

$$\leq \left[\int_0^1 f^2(t)\,dt \right]^{1/2} \sqrt{y-x} = \underline{\|f\|_2 \sqrt{y-x}} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ Tf est $1/2$-höldérienne, dc. continue (dc ds $\mathcal{L}^2$)

2. $a(f,h) := \int_0^1 f(x)h(x) + \int_0^1 Tf(x)\, Th(x)\,dx$

$$|a(f,h)| \leq \|f\|_2 \|h\|_2 + \|Tf\|_2 \|Th\|_2 \quad (2)$$

$$\leq \|f\|_2 \|h\|_2 + \|Tf\|_\infty \|Th\|_\infty$$

De (1), on a $|Tf(y)| \leq \|f\|_2 \sqrt{y} \leq \|f\|_2$
(avec $x=0$)
$\forall y \in [0,1]$

$$\Longrightarrow \|Tf\|_\infty \leq \|f\|_2 \qquad (3)$$

De (2) et (3) : $|a(f,h)| \leq 2\|f\|_2 \|h\|_2$

$(M=2)$

$$a(f,f) = \int_0^1 f^2(x)\,dx + \underbrace{\int_0^1 [Tf(x)]^2\,dx}_{\geq 0}$$

$$\geq \|f\|_2^2$$

$(C=1)$

D'où la conclusion, en utilisant Lax-Milgram, forme 1.

Exo 23 $\{e_n\}$, $\{f_n\}$

$$S := \sum_n \|Te_n\|^2 = \sum_n \sum_m \langle Te_n, f_m\rangle^2$$

Parseval pour chaque n

$$\underset{\text{Tonelli}}{=} \sum_m \sum_n \langle Te_n, f_m \rangle^2 = \sum_m \sum_n \langle f_m, Te_n \rangle^2$$

$$\underset{\text{def. } T^*_2}{=} \sum_m \sum_n \langle T^* f_m, e_n \rangle^2 \underset{\text{Parseval}}{=} \sum_m \| T^* f_m \|^2$$

$$= \sum_n \| T f_n \|^2 \in [0, \infty]$$

$\sqrt{S}$ = norme de Frobenius de T

T de matrice $(a_{j,k})$

$$\sqrt{S} = \sqrt{\sum_{j,k} (a_{j,k})^2} \quad \leftarrow \text{norme}$$

$$T \longrightarrow \sqrt{S} \quad \text{norme}$$

Exo 22

$(X, \mathcal{T}, \mu)$ μ, ν σ-finies

$(Y, \mathcal{S}, \nu)$

$L^2(X)$ $\longrightarrow \{e_m\}$ base hilbertienne

$L^2(Y)$ séparables $\longrightarrow \{f_n\}$ base hilbertienne

$$f \otimes g(x,y) = f(x)g(y)$$

$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $f \otimes g : X \times Y \to \mathbb{R}$

$g : Y \to \mathbb{R}$

$e_m \otimes f_n : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$

But : mq $(e_m \otimes f_n)_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 0}}$ base hilbertienne

<u>de</u> $L^2(X \times Y, \mathcal{T} \otimes \mathcal{S}, \mu \otimes \nu))$

<u>Étape 1</u> $\underbrace{e_m \otimes f_n}_{\text{mesurable}} \in \mathcal{L}^2(X \times Y)$

$$\int_{X \times Y} [e_m \otimes f_n(x,y)]^2 \, d\mu \otimes \nu(x,y)$$

$$= \underline{\underline{\text{Tonelli}}}$$

$$= \int_{\cancel{X} \times Y} e_m^2(x) f_n^2(y) \, d\mu \otimes \nu(x,y)$$

$$\int_X e_m^2(x) \, d\mu(x) \int_Y f_n^2(y) \, d\nu(y) = 1$$

Étape 2. $\{e_m \otimes f_n\}_{m,n \geq 0}$ est orthonormée

Soit $(m',n'), (m,n) \in \mathbb{N}^2$

$$\langle e_{m'} \otimes f_{n'} , e_m \otimes f_n \rangle$$

$$= \int_{X \times Y} e_{m'}(x) \underbrace{e_m(x)\, f_{n'}(y)}_{\cdots\cdots} f_n(y) \, d\mu\otimes\nu(x,y)$$

Fubini ⚠

$$\int_{X\times Y} \left| \quad \cdots \quad \right| d\,\mu\otimes\nu(x,y) < \infty$$

Vrai, via Hölder, car

$e_{m'}\otimes f_{n'} \in L^2$ (étape 1)

$e_m\otimes f_n \in L^2$ (étape 1)

$$= \int_X e_{m'}(x)\, e_m(x)\, d\mu(x) \int f_{n'}(y)\, f_n(y)\, d\nu(y)$$

$$= \langle e_{m'}, e_m\rangle \langle f_{n'}, f_n\rangle = 0 \text{ si}$$

$(m', n') \neq (m, n)$

$= 1$ si $(m', n') = (m, n)$

⚠ (x_j) orthonormée H Hilbert

Base hilbertienne ?

Méthode 1 * $\mathrm{Vect}\,(x_j)$ dense ds H

Méthode 2 * $\{x_j\}^{\perp} = \{0\}$

Méthode 3

* $\underline{\forall x \in H, \quad \|x\|^2} = \sum_j \underline{\langle x, e_j \rangle^2}$

Soit $h \in L^2(X \times Y)$

On a

$$\|h\|_2^2 = \int_{X \times Y} h^2(x,y)\, d\mu \otimes \nu(x,y)$$

$$\underset{\text{Tonelli}}{=} \int_Y \left(\int_X h^2(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \quad (1)$$

pour presque tout $y \in X$,

$$\int_X h^2(x,y)\, d\mu(x) < \infty$$

càd $X \ni x \longmapsto h(x,y) \in L^2(X)$

Pour un tel y :

$$\int_X h^2(x,y)\,d\mu(x) \underset{\text{Parseval}}{=} \sum_m \langle x \mapsto h(x,y), e_m \rangle^2$$

$$= \sum_m \Big(\int_X \underbrace{h(x,y) e_m(x)\, d\mu(x)}_{\text{fonction de } y,\ \text{mesurable}} \Big)^2 \quad (2)$$

(voir début du TD!)

$\Rightarrow$

$$\|h\|_2^2 = \int_Y \sum_m \left(\int_X h(x,y)\, e_m(x)\, d\mu(x) \right)^2 d\nu(y)$$

$$\underset{\text{Tonelli}}{=} \sum_m \int_Y \underbrace{\left(\int_X h(x,y)\, e_m(x)\, d\mu(x) \right)^2}_{R_m(y)} d\nu(y)$$

$$= \sum_m \int_Y [h_m(y)]^2 \, d\nu(y) \quad (3)$$

(car, car $h \in L^2$)

Donc : $\forall m \quad h_m \in L^2(Y)$

Dc ! $\forall m \quad \int_Y [h_m(y)]^2 \, d\nu(y) =$

Parseval

$$\sum_n \langle h_m, f_n \rangle^2 = \sum_n \left(\int_Y h_m(y) f_n(y) \, d\nu(y) \right)^2$$

$$= \sum_n \left[\int_Y \left(\int_X h(x,y)\, e_m(x)\, d\mu(x) \right) f_n(y)\, d\nu(y) \right]^2$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \sum_n \left[\int_{X\times Y} h(x,y)\, e_m(x)\, f_n(y)\, d\mu\otimes\nu(x,y) \right]^2$$

$$= \sum_n \langle h, e_m \otimes f_n \rangle^2 \qquad (4)$$

$$(3) + (4) \Longrightarrow \quad \|h\|_2^2 = \sum_m \left(\sum_n \langle h, e_m \otimes f_n \rangle^2 \right)$$

$$= \sum_{m,n} \langle h, e_m \otimes f_n \rangle^2 \qquad \square$$

Fubini : On doit mq

$$\int_{X \times Y} \underbrace{\underbrace{|h(x,y)|}_{L^2} \, \underbrace{|e_m \otimes f_n(x,y)|}_{L^2}}_{L^1 \text{ (Hölder)}} \, d\mu \otimes \nu(x,y) < \infty$$

On $h \in L^2(X \times Y)$

étape 1, $e_m \otimes f_n \in L^2(X \times Y)$

Exo 20

H Hilbert

$$E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots$$

e.v.n de dim finie

$\bigcup E_n$ dense ds H

$\mathcal{F}_0$ BON de E_0

$\mathcal{F}_1$ BON de $E_1 \ominus E_0$

$E_1 \ominus E_0$

$E_1 = E_0 \oplus (E_1 \ominus E_0)$

E_0

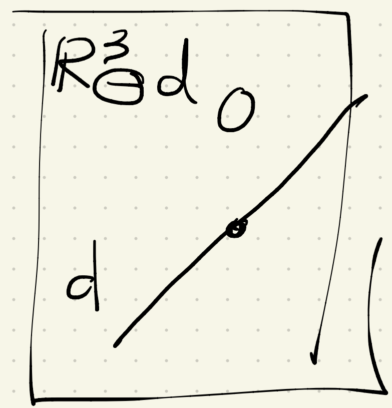
E_1

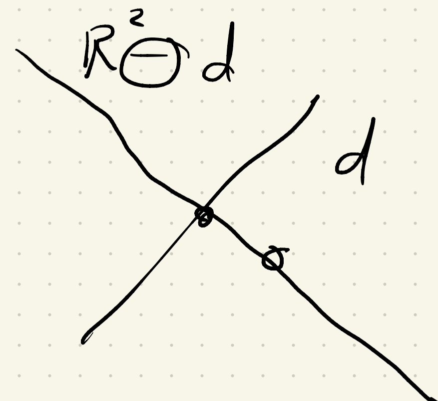
F_2 BON de $E_2 \ominus E_1$

$\bigcup_{j \geq 0} F_j$ base hilbertienne de H

$\mathbb{R}^3 \ominus d$

$\mathbb{R}^2 \ominus d$





$F^{\perp}$

$$\underbrace{E_1 \ominus E_0}_{E_0^{\perp} \text{ par rapport à } E_1} \neq \left(E_0^{\perp}\right)$$

par rapp. à H