Fanny LAPALUS

Chloé LUTZ

Benjamin MARCOUX

Analyse fonctionnelle

TD 1 : Exercice n°22

Rappel de l'énoncé :

Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie.

Nous voulons montrer que si E est un espace de Banach, alors E ne peut pas avoir de base algébrique dénombrable.

Démontrons ceci par l'absurde :

Nous supposons qu'il existe $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ une base algébrique de E qui est dénombrable et nous allons construire une suite de Cauchy qui ne converge pas dans E.

On pose $E_n:=\text{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\} \quad \forall n \geqslant 1$

1.(*a*)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$E_{n+1} = \text{Vect}\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$

En particulier, $e_{n+1} \in E_{n+1}$

Or, e_{n+1} étant un vecteur de la base de E, il est linéairement indépendant de tous les autres.

En particulier, $e_{n+1} \notin \text{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$ d'où $e_{n+1} \notin E_n$

Donc $E_{n+1} \neq E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.(*b*)

Par double inclusion :

Soit $x \in E$,

$x = \Sigma_{i\geqslant 1}\, x_i e_i$ avec un nombre fini de scalaires non nuls

Soit i_0 le plus grand indice tel que $x_{i0} \neq 0$

Alors $x \in E_{i0}$ donc $x \in \cup_{n\geqslant 1} E_n$

D'où $E \subset \cup_{n\geqslant 1} E_n$

Soit $x \in \cup_{n \geqslant 1} E_n$

$\exists n_0 \epsilon \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad x \in E_{n_0}$

Donc $x \in \text{Vect}\,\{e_1, \ldots, e_{n_0}\}$

$\exists (x_1, \ldots, x_{n_0}) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \Sigma_{i=1}^{n_0} x_i e_i$

Or,

$\forall i \in [\![1, n_0]\!]$, e_i est un vecteur de la base de E et x_i est un scalaire donc $x \in E$

Donc $\cup_{n \geqslant 1} E_n \subset E$

Nous retrouvons donc que $E = \cup_{n \geqslant 1} E_n$

2.

Construisons la suite (f_n) vérifiant chacune des 5 conditions :

On pose $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

On a $E_{n-1} \subsetneq E_n$ donc d'après le lemme de Riesz, il existe $x \in E_n$ tel que :

$\|x\| = 1$

$\forall y \in E_{n-1} \, \|x - y\| \geqslant 1$

Posons donc $f_n := x$

Les conditions (a), (b), et (c) sont donc validées.

$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $f_n = \Sigma_{k=1}^n \lambda_k e_k$ avec $\lambda_n \neq 0$ sinon $\| f_n - \Sigma_{k=1}^{n-1} \lambda_k e_k \| = 0$ ce qui est absurde d'après la condition (c)

On suppose que $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, f_i a été construit ainsi.

Montrons que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de E_n.

Il suffit de montrer que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une famille libre car $\text{Card}\{f_1, \ldots, f_n\} = n = \dim E_n$

Soit $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\Sigma_{i=1}^n \mu_i f_i = 0$

Montrons que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\mu_i = 0$

On remarque que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i = \Sigma_{j=1}^i \lambda_j e_j$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour les mêmes raisons que précédemment.

On a donc

$\Sigma_{i=1}^n \mu_i f_i$

$= \Sigma_{i=1}^n \mu_i \, \Sigma_{j=1}^i \lambda_{i_j} e_j$ avec $\lambda_{i_i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$= \Sigma_{j=1}^n \Sigma_{i=j}^n \mu_i \lambda_{i_j} e_j$ avec $\lambda_{j_j} \neq 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

$= \Sigma_{j=1}^n e_j \, \Sigma_{i=j}^n \mu_j \lambda_{i_j}$

Or, $\{e_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ forme une base de E_n donc

$\Sigma_{j=1}^n e_j \, \Sigma_{i=j}^n \mu_j \lambda_{i_j} = 0 \Leftrightarrow \Sigma_{i=j}^n \mu_j \lambda_{i_j} = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$

On remarque que pour $j=n$ on a :

$\mu_n\lambda_{n_n}=0$ or $\lambda_{n_n}\neq 0$ donc $\mu_n=0$

Pour $j=n-1$ cela donne :

$\mu_{n-1}\lambda_{n-1_{n-1}}+\mu_n\lambda_{n_n}=0 \Leftrightarrow \mu_{n-1}\lambda_{n-1_{n-1}}=0$ or $\lambda_{n-1_{n-1}}\neq 0$ donc $\mu_{n-1}=0$

On peut réitérer ceci jusqu'à μ_1 ce qui nous donne :

$(\mu_1,\ldots,\mu_n)=(0,\ldots,0)$

Donc $\{f_1,\ldots,f_n\}$ est libre et est donc une base de E_n d'où la condition (d) est validée.

D'après la question 1/ (b), puisque $E=\cup_{n\geqslant 1}E_n$, on retrouve bien que $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ est une base de E ce qui nous donne la validation de la condition (e).

3.

Soit $n,m\geqslant 1$, on peut supposer arbitrairement que $m\geqslant n$

$\|x_m-x_n\|$

$=\left\|\Sigma_{k=1}^{m}\frac{1}{3^k}f_k-\Sigma_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}f_k\right\|$

$=\left\|\Sigma_{k=n+1}^{m}\frac{1}{3^k}f_k\right\|$

$\leqslant\Sigma_{k=n+1}^{m}\frac{1}{3^k}\|f_k\|$

$=\Sigma_{k=n+1}^{m}\frac{1}{3^k}\quad \text{car}\,\forall k\geqslant 1,\|f_k\|=1$

$\leqslant\Sigma_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\quad \text{comme reste de } s\text{érie convergente.}$

Donc $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est bien une suite de Cauchy.

4.

Soient $m\geqslant 1$ et $y\in E_m$

Dans un premier temps, on suppose $n=m+1$

$\|x_n-y\|=\|\Sigma_{k=1}^{n}3^{-k}f_k-\Sigma_{k=1}^{m}y_kf_k\|$

$=\|3^{-(m+1)}f_{m+1}+\Sigma_{k=1}^{m}(3^{-k}-y_k)f_k\|$

$=\|3^{-(m+1)}(f_{m+1}-3^{m+1}\Sigma_{k=1}^{m}(3^{-k}-y_k)f_k)\|$

$=3^{-(m+1)}\|(f_{m+1}-3^{m+1}\Sigma_{k=1}^{m}(3^{-k}-y_k)f_k)\|$ or $3^{m+1}\Sigma_{k=1}^{m}(y_k-3^{-k})f_k\in E_m$, avec (c)

$\geqslant\frac{1}{3^{m+1}}\quad\geqslant\frac{1}{2.3^{m+1}}$

Maintenant on suppose $n \geqslant m+2$

$\|x_n - y\| = \|\Sigma_{k=1}^{n} 3^{-k} f_k - \Sigma_{k=1}^{m} y_k f_k\|$

$= \|\Sigma_{k=m+2}^{n} 3^{-k} f_k + 3^{-(m+1)} f_{m+1} - \Sigma_{k=1}^{m} (y_k - 3^{-k}) f_k\|$

$= \|\Sigma_{k=m+2}^{n} 3^{-k} f_k + 3^{-(m+1)} (f_{m+1} - 3^{m+1} \Sigma_{k=1}^{m} (y_k - 3^{-k}) f_k)\|$

$\geqslant \|3^{-(m+1)} (f_{m+1} - 3^{m+1} \Sigma_{k=1}^{m} (y_k - 3^{-k}) f_k)\| - \|\Sigma_{k=m+2}^{n} 3^{-k} f_k\|$

$= |3^{-(m+1)}| \|f_{m+1} - 3^{m+1} \Sigma_{k=1}^{m} (y_k - 3^{-k}) f_k\| - \|\Sigma_{k=m+2}^{n} 3^{-k} f_k\|$

$\geqslant 3^{-(m+1)} - \Sigma_{k=m+2}^{n} \|3^{-k} f_k\|$ d'après la condition (c)

$= 3^{-(m+1)} - \Sigma_{k=m+2}^{n} |3^{-k}|$

$= 3^{-(m+1)} - \left(3^{-(m+2)} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-m-1}}{\frac{2}{3}}\right)$

$= 3^{-(m+1)} - \frac{1}{2.3^{m+1}} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-m-1}\right)$

$= \frac{1}{2.3^{m+1}} (2 - 1 + 3^{-n+m+1})$

$= \frac{1}{2.3^{m+1}} (1 + 3^{-n+m+1})$ or $(1 + 3^{-n+m+1}) \geqslant 1$ donc

$\geqslant \frac{1}{2.3^{m+1}}$

Remarque :

Il est possible d'obtenir ce résultat dans un cas plus général, nous pouvons poser

$x_n = \Sigma_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$

Nous avons toujours ces deux conditions requises :

$(x_n)_n$ est une suite de Cauchy (1)

$(x_n)_n$ ne converge pas (2)

Afin de réaliser (1), il suffit que $\Sigma_{k \geqslant 1} |\alpha_k| < \infty$ pour que la suite $(x_n)_n$ soit de Cauchy.

Pour réaliser la condition (2), nous allons réaliser le même calcul que dans le cas particulier et obtenir une condition :

$\|x_n - y\| = \|\Sigma_{k=1}^{n} \alpha_k f_k - \Sigma_{k=1}^{m} \beta_k f_k\|$

$= \|\Sigma_{k=m+2}^{n} \alpha_k f_k + \alpha_{m+1} f_{m+1} - \Sigma_{k=1}^{m} (\beta_k - \alpha_k) f_k\|$

$= \left\|\Sigma_{k=m+2}^{n} \alpha_k f_k + \alpha_{m+1} \left(f_{m+1} - \frac{1}{\alpha_{m+1}} \Sigma_{k=1}^{m} (\beta_k - \alpha_k) f_k\right)\right\|$

$\geqslant -\|\Sigma_{k=m+2}^{n} \alpha_k f_k\| + \left\|\alpha_{m+1} \left(f_{m+1} - \frac{1}{\alpha_{m+1}} \Sigma_{k=1}^{m} (\beta_k - \alpha_k) f_k\right)\right\|$

$\geqslant |\alpha_{m+1}| - \Sigma_{k=m+2}^{n} |\alpha_k|$

Pour que la suite ne converge pas, on veut

$|\alpha_{m+1}| - \Sigma_{k=m+2}^{n} |\alpha_k| > 0 \Leftrightarrow |\alpha_{m+1}| > \Sigma_{k=m+2}^{n} |\alpha_k| \Leftrightarrow |\alpha_m| > \Sigma_{k=m+1}^{n} |\alpha_k|$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

5.

Grâce à la question 4, nous observons que pour tout point $y \in E$, la suite x_n ne converge pas vers y, donc x_n ne converge pas dans E. Nous avons donc créé une suite de Cauchy qui ne converge pas, on en déduit donc que E ne serait pas complet donc pas un espace de Banach $\rightarrow$ Absurde. Nous pouvons donc en déduire que E ne peut pas possèder de base algébrique dénombrable.

Cas particulier :

Nous savons que $\mathbb{R}[X] = \text{Vect}\,\{X^i\}_{i \geqslant 1}$ donc $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie avec une base algébrique dénombrable, d'après cet exercice, nous pouvons donc en déduire qu'il existe aucune norme telle que $\mathbb{R}[X]$ soit de Banach.