Travail en trinôme numero 1

Julie Semaan, Ramón POO, Clément Bardet

27 septembre 2022

23. Utiliser l'éxercice précédent pour montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est ni un sous-espace ouver ni un sous-espace fermé de $C([0,1],\mathbb{R})$ munie de sa norme usuel $\|.\|_\infty$. Commencer par prpéciser pourquoi $\mathbb{R}[X]$ peut être vue comme un sous-espace de $C([0,1],\mathbb{R})$.

    Pour voir $\mathbb{R}[X]$ comme un sous espace de $C([0,1],\mathbb{R})$, on identifie chaque polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec sa restriction $P_{\upharpoonright[0,1]}$. Il faut vérifier que cette identidication est bien définie. Pour cela il suffit de constater que si deux polynômes $P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X^k$ et $Q = \sum_{k=1}^{m} \beta_k X^k$ sont différents alors $\alpha_k \neq \beta_k$ pour un certain $k \geq 0$. Or $P^{(k)}(0) = \alpha_k k!$ et $Q^{(k)}(0) = \beta_k k!$, donc ils sont differents en tant que fonctions dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

    D'après (l'exercice 22), aucun espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir une base algébrique dénombrable. Or $\mathbb{R}[X]$ a une base algébrique dénombrable. Comme $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel normé, on conclut que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet. Comme $\mathbb{R}[X]$ est un sous espace de l'espace de Banach $C([0,1],\mathbb{R})$ on conclut qu'il n'est pas fermé.

    Comme $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace propre de $C([0,1],\mathbb{R})$ (ce n'est pas tout l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ car ce n'est pas un espace de Banach), alors grâce à (l'exercice 21), qui afirme que l'intérieur de tout sous espace propre d'un espace de Banach est vide, son intérieur est vide. Comme $\mathbb{R}[X]$ est non vide on conclut qu'il n'est pas ouvert.

24. Obtenir directement la conclusion de l'exercice précédent en utilisant la suite :

$$P_n(X) = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{X^k}{k!} \quad n \geq 0.$$

Considerons la suite de polynômes de l'enoncé.
Pour montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas fermé on constate que la fonction $exp : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^t$ est la limite uniforme de P_n, mais $exp \notin \mathbb{R}[X]$ (car elle a des dérivés non nules en 0 de tous les ordres. Donc $\mathbb{R}[X]$ n'est pas fermé dans $C([0,1],\mathbb{R})$.

Montrons que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas ouvert en montrant que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $f \in C([0,1],\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}[X]$ tel que $\|P_1 - f\|_\infty < \epsilon$.

Soit $\epsilon > 0$, alors il existe N_ϵ tel que $\left\|P_n - e^X\right\| < \epsilon$ (convergence uniforme de la suite de Taylor).

on pose :

$$f(x) = e^x - \sum_{n=2}^{N_\epsilon} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in [0,1].$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
\|P_1 - f\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \left| 1 + x - \left(e^x - \sum_{n=2}^{N_\epsilon} \frac{x^n}{n!} \right) \right| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left| \sum_{n=0}^{N_\epsilon} \frac{x^n}{n!} - e^x \right| \\
&= \left\| P_{N_\epsilon} - e^X \right\|_\infty < \epsilon.
\end{aligned}$$

De plus, $f \notin \mathbb{R}[X]$ (car $e^X \notin \mathbb{R}[X]$ et que $\mathbb{R}[X]$ est un espace vectoriel). Donc $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un sous-espace ouvert de $C([0,1],\mathbb{R})$.