Analyse Fonctionnelle 1 – TT5 – Feuille 2, Exercice 13

Jérémie Klingler, Malo Chabanat--Lebeault, Antoine Merlin

1. **a.** Comme $F \subset U$ et que F et U^C sont fermés, on en déduit que $\overline{F} \cap \overline{U^C} = F \cap U^C = \varnothing$ et par conséquent, $\forall x \in X, d_F(x) + d_{U^C}(x) > 0$. La fonction ψ est donc bien définie et positive car les distances sont positives. En outre, la positivité des distances assure que pour tout $x \in X$, $d_{U^C}(x) \leq d_{U^C}(x) + d_F(x)$ et donc que ψ est à valeurs dans $[0, 1]$. Les distances étant des fonctions continues car 1-lipschitziennes, on sait en outre que ψ est une application continue par quotient d'applications continues. En somme, on a montré que $\psi \in \mathcal{C}(X, [0, 1])$.

b. Soit $x \in F \subset U$, alors $d_F(x) = 0$ et $d_{U^C}(x) > 0$, ce qui assure que $\psi(x) = \dfrac{d_{U^C}(x)}{d_{U^C}(x)} = 1$.

c. Soit $x \in U^C$. Alors $d_{U^C}(x) = 0$ et donc $\psi(x) = 0$.

Dans le cas où $F = \varnothing$, on peut simplement poser $\psi : x \mapsto 0$ car la condition ($\psi(x) = 1$ si $x \in F$) devient caduque.

2. Soit F un fermé non vide de X. Si $F = X$, alors $\chi_F(x) = 1, \forall x \in X$. Ainsi, la suite $(\psi_j)_{j\geq 1}$ où $\psi_j = \chi_F, \forall j \geq 1$ constitue bien une suite d'applications continues $X \to [0, 1]$ telle que $\psi_j \to \chi_F$ simplement.

On suppose à présent que $F \neq X$. Posons la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ d'ensembles définie par $U_n := \{x \in X \mid d_F(x) < 1/n\}$ pour $n \geq 1$. La distance à une partie étant une application continue, on en déduit que chaque U_n est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $[0, 1/n[$ par une application continue. En outre, $F \subset U_n$ pour tout $n \geq 1$ car $d_F(x) = 0 < 1/n$ pour tous $x \in F, n \geq 1$.

La suite (U_n) ainsi définie est décroissante pour l'inclusion et converge vers $\bigcap_{n\geq 1} U_n = \overline{F} = F$.

Supposons que $U_n = X, \forall n \in \mathbf{N}$. Alors, un passage à la limite assure que $d_F(x) = 0$ pour tout $x \in X$ et donc que $X \subset \overline{F} = F$, d'où $X = F$, ce qui est exclu. Ainsi, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $U_N \neq X$. En outre, comme la suite (U_n) est décroissante pour l'inclusion, on en déduit que $U_n \neq X$ pour tout $n \geq N$.

La suite $(U_n)_{n\geq N}$ ainsi définie permet alors de construire une suite $(\psi_j)_{j\geq N}$ avec

$$\psi_j : x \mapsto \frac{d_{U_j^C}(x)}{d_F(x) + d_{U_j^C}(x)}.$$

La question précédente assure que $\psi_j \in \mathcal{C}(X, [0, 1]), \forall j \geq N$. Soit $x \in X$.

- ⋆ Si $x \in F$, alors la question précédente assure que $\psi_j(x) = 1, \forall j \geq N$ et donc que $\psi_j(x) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 1$.
- ⋆ Si $x \notin F$, alors $x \notin \bigcap_{n\geq N} U_n$ et il existe donc $M \geq N$ tel que pour tout $j \geq M$, $x \in U_j^C$, (car la suite est décroissante pour l'inclusion) *id est* $\psi_j(x) = 0$, et donc $\psi_j(x) \xrightarrow[j\to+\infty]{} 0$.

En conclusion, on a montré que $\psi_j \to \chi_F$ simplement.

3. Soit $1 \leq j \leq m$. On définit $F_j := \left\{x \in F\,;\, d(x, U_j^C) \geq d(x, U_i^C), \forall i \neq j\right\}$.

- $\star$ Montrons que F_j est fermé. En effet,
$$F_j = \bigcap_{\substack{1\leq i\leq m\\ i\neq j}} \left\{x \in F\,;\, d(x,U_j^C) - d(x,U_i^C) \geq 0\right\} =: G_{ij}.$$
Soit $i \neq j$. G_{ij} est fermé comme image réciproque du fermé $[0,+\infty[$ par l'application continue $x \in F \mapsto d(x,U_j^C) - d(x,U_i^C)$. On en déduit donc que F_j est fermé comme intersection de fermés.
- $\star$ Montrons que $F_j \subset U_j$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in F_j \setminus U_j$. Ainsi $d(x,U_j^C) = 0$ et donc pour tout $i \neq j$, $0 \geq d(x,U_i^C)$, ce qui conduit à $d(x,U_i^C) = 0$ par positivité de la distance. Comme les U_i^C sont tous fermés, on en déduit que $x \in \bigcap_{1\leq i\leq m} U_i^C$. Or $x \in F_j \subset F \subset \bigcup_{1\leq i\leq m} U_i$: absurde. Ainsi, $F_j \subset U_j$.
- $\star$ On a déjà $F_1 \cup \ldots \cup F_m \subset F$ par définition. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in F$. L'ensemble $D_x := \left\{d(x,U_i^C), 1 \leq i \leq m\right\}$ est une partie de $\mathbf{R}^+$ à m éléments. On peut donc définir son maximum. Ainsi, il existe $1 \leq j \leq m$ tel que $d(x,U_j^C) = \max D_x$. Ainsi $d(x,U_j^C) \geq d(x,U_i^C)$, pour tout $i \neq j$ et donc $x \in F_j$.

En conclusion, les (F_j) ainsi définis conviennent.

4. On suppose que $F \neq X$ et $U_j \neq X, \forall 1 \leq j \leq m$. Posons $U_0 := F^C$ et $F_0 := (U_1 \cup \cdots \cup U_m)^C$. On pose alors pour $1 \leq j \leq m$:
$$F_j := \left\{x \in F\,;\, d(x,U_j^C) \geq d(x,U_i^C), \forall i \neq j\right\}.$$
La question précédente assure que les (F_j) sont fermés, que $F_1 \cup \cdots \cup F_m = F$ et que $F_j \subset U_j, \forall 1 \leq j \leq m$. On définit alors ψ_j pour $0 \leq j \leq m$ comme dans la question 1 (en faisant l'adaptation nécessaire si $F_j = \varnothing$).
Les résultats de la question 1 assurent que $\psi_j \in \mathcal{C}(X,[0,1])$, vaut 1 sur F_j et 0 sur U_j^C.

Soit $j \in [\![1,m]\!]$. On définit $\zeta_j := \dfrac{\psi_j}{\psi_0 + \ldots + \psi_m}$.
Cette fonction est bien définie sur X. En effet, soit $x \in X$. Supposons que $\psi_0(x) + \ldots + \psi_m(x) = 0$. Comme les (ψ_i) sont à valeurs positives, on aurait $\psi_i(x) = 0$, $\forall 0 \leq i \leq m$ et par définition des (ψ_i), $x \in U_i^C, \forall 0 \leq i \leq m$.
Or $U_0^C = F \subset U_1 \cup \cdots \cup U_m$, donc $x \notin \bigcap_{i=1}^m U_i^C$: absurde.
Ainsi ζ_j est définie, continue sur X et à valeurs dans $[0,1]$ car les (ψ_i) sont continues et positives.

Soit $x \in U_j^C$. On a $\zeta_j(x) = \dfrac{\psi_j(x)}{\psi_0(x) + \ldots + \psi_m(x)} = 0$ car $\psi_j(x) = 0$.
Soit $x \in F$. Alors $\psi_0(x) = 0$ et
$$\sum_{k=1}^m \zeta_k(x) = \frac{\psi_1(x) + \ldots + \psi_m(x)}{0 + \psi_1(x) + \ldots + \psi_m(x)} = 1.$$
Ainsi, on a bien construit les fonctions $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ demandées.

Si $F = X$ ou qu'il existe $1 \leq j \leq m$ tel que $U_j = X$, alors $U_1 \cup \cdots \cup U_m = X$ et donc $U_1^C \cap \cdots \cap U_m^C = \varnothing$. On définit alors les (ζ_i) de la manière suivante pour $1 \leq i \leq m$:
$$\zeta_i := \frac{\psi_i}{\psi_1 + \ldots + \psi_m}.$$
Comme $U_1^C \cap \cdots \cap U_m^C = \varnothing$, il n'existe pas de $x \in X$ tel que $\psi_i(x) = 0, \forall i$ et donc $\psi_1 + \ldots + \psi_m$ ne s'annule jamais. Ainsi, de la même manière, les (ζ_i) sont dans $\mathcal{C}(X,[0,1])$ et respectent les conditions demandées.