Analyse fonctionnelle

Alexandre Da Silva, Pierre Duluard, Yann Vernay

Feuille 2 - Exercice 6

Q.1. Soit $f \in L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$.
La mesure μ est fini, donc la classe de la fonction constante égale à 1, notée 1 appartient à $L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$. On a de plus $||1||_2 = (\int_X 1 d\mu)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\mu(X)}$.
On applique Cauchy Schwarz entre f et 1, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_X |f| d\mu &\leq ||1||_2 ||f||_2 \\ &\leq \sqrt{(\mu(X)} ||f||_2\end{aligned}$$

Donc $f \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$, d'où $L^2(X, \mathscr{T}, \mu) \subset L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$.
On remarque également que $||f||_1 \leq \sqrt{(\mu(X)} ||f||_2$

Q.2. Soit $\varphi \in (L^1(X, \mathscr{T}, \mu))'$. On note $\tilde{\varphi}$ la restriction de φ à $L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$, qui est clairement une forme linéaire sur $L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$.
La continuité de φ donne l'existence de $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall f \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu), |\varphi(f)| \leq C||f||_1$.
Soit $f \in L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$, on a alors

$$\begin{aligned}|\tilde{\varphi}(f)| = |\varphi(f)| &\leq C||f||_1 \\ &\leq C\sqrt{\mu(X)} ||f||_2\end{aligned}$$

D'où la continuité de $\tilde{\varphi}$.

Q.3. D'après le théorème de représentation de Riesz, $(L^2(X, \mathscr{T}, \mu))' = L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$.
D'après la question précédente, $\tilde{\varphi}$ appartient à $(L^2(X, \mathscr{T}, \mu))'$, donc il existe $g \in L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$ telle que pour tout $f \in L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$, on a

$$\tilde{\varphi}(f) = \int_X fg d\mu$$

Q.4. Soit h dans la classe de g et $A = \{x \in X, |h(x)| > ||\varphi||\}$.
On remarque que $A = h^{-1}(]||\varphi||, +\infty])$, donc A est mesurable.
On pose alors $f = sgn(h)\chi_A$, qui est mesurable.
On a $\int_X |f|^2 d\mu = \int_A 1 d\mu = \mu(A)$, donc $f \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $||f||_2 = \sqrt{\mu(A)}$.
De plus, $\int_X |f| d\mu = \int_A 1 d\mu = \mu(A)$, donc $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $||f||_1 = \mu(A)$.
Supposons $\mu(A) > 0$, alors

$$\begin{aligned}|\varphi(f)| &= |\int_X fh d\mu| \\ &= |\int_A sgn(h) h d\mu| \\ &= \int_A |h| d\mu \\ &> \int_A ||\varphi|| d\mu \\ &> ||\varphi||\mu(A) = ||\varphi|| ||f||_1\end{aligned}$$

Donc $\frac{|\varphi(f)|}{||f||_1} > ||\varphi||$, ce qui est impossible car par définition $||\varphi|| = \sup\limits_{f \in L^1} \frac{|\varphi(f)|}{||f||_1}$.
D'où $\mu(A) = 0$.

On a alors $|h| \leq ||\varphi||$ p.p., donc $h \in \mathscr{L}^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$, i.e. $g \in L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $||g||_\infty = ||h||_\infty \leq ||\varphi||$.

Q.5. Soit $\varphi \in (L^1(X, \mathscr{T}, \mu))'$.
D'après les questions précédentes, il existe $g \in L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$ telle que $\forall f \in L^2(X, \mathscr{T}, \mu), \varphi(f) = \int_X fgd\mu$.

Montrons que cette égalité peut s'étendre à tout f dans $L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$.
Soit $f \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$, on note encore f un de ses représentants.
On pose pour $n \in \mathbb{N}, A_n = \{x \in X, |f(x)| \leq n\}$ et $f_n = f\chi_{A_n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \int_X |f_n|^2 d\mu &= \int_{A_n} |f|^2 d\mu \\ &\leq n^2 \mu(A_n) < +\infty \end{aligned}$$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathscr{L}^2(X, \mathscr{T}, \mu)$.
De plus, on note $A = \{x \in X, |f(x)| = \infty\}$. Cet ensemble est clairement négligeable car f appartient à $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, \mu)$.
Soit $x \in X \setminus A$, il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) \leq n_0$ et donc $\forall n \geq n_0, f_n(x) = f(x)$.
D'où, $\forall x \in X \setminus A, f_n(x) \to f(x)$, i.e. $f_n \to f$ p.p.
D'autre part, on a $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq |f|$.
Les $(f_n)_{n \leq 0}$ définissent donc une suite de $L^2(X, \mathscr{T}, \mu)$ (donc de $L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$) qui vérifie :

- $f_n g \to fg$ p.p.
- $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n g| \leq ||g||_\infty |f|$ p.p. (intégrable sur X)

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\varphi(f_n) = \int_X f_n g d\mu \to \int_X fgd\mu$$

De plus, on a aussi $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$ par continuité de ϕ, d'où

$$\varphi(f) = \int_X fgd\mu$$

On sait déjà que $||\varphi|| \geq ||g||_\infty$. Montrons que c'est en fait une égalité.
Soit $f \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\leq \int_X |f||g|d\mu \\ &\leq ||g||_\infty \int_X |f|d\mu \\ &\leq ||g||_\infty ||f||_1 \end{aligned}$$

Donc $||\varphi|| \leq ||g||_\infty$, d'où $||\varphi|| = ||g||_\infty$.

Montrons l'unicité de g. Supposons que g_1 et g_2 conviennent. On a alors $\forall f \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu), \varphi(f) = \int_X fg_1 d\mu = \int_X fg_2 d\mu$, i.e. $\int_X f(g_1 - g_2)d\mu = 0$. D'où $g_1 = g_2$ p.p., et donc l'unicité dans $L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$.

Réciproquement, soit $g \in L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $\varphi : f \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu) \mapsto \int_X fgd\mu \in \mathbb{R}$.
Alors φ est clairement linéaire et pour tout $f \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu), |\varphi(f)| \leq ||g||_\infty ||f||_1$, donc φ est continue, d'où $\varphi \in (L^1(X, \mathscr{T}, \mu))'$.

Remarque Le résultat reste vrai si μ est une mesure σ-finie.
Dans ce cas, il existe une partition dénombrable $(X_n)_{n \geq 0}$ de X telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(X_n) < +\infty$.
Soit $\varphi \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu)$.
D'après le résultat précédent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $g_n \in L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$ telle que la restriction φ_n de φ à X_n vérifie $\forall f \in L^1(X_n, \mathscr{T}, \mu), \varphi_n(f) = \int_{X_n} fg_n d\mu$.
On pose $g = \sum_{n \geq 0} g_n \chi_{X_n} \in L^\infty(X, \mathscr{T}, \mu)$, qui vérifie alors $\forall f \in L^1(X, \mathscr{T}, \mu), \varphi(f) = \int_X fgd\mu$.