Exercice 1 :

Soit $K \subset R^n$ compact et $\varepsilon > 0$.

On pose $K_j = \{x \in R^n, d(x, K) \leq 1/2^j\}$;

Etape 1 : Montrons que $K_j \searrow K$

Nous avons tout d'abord que $K_{j+1} \subset K_j$ et que $K \subset K_j$, il ne reste plus qu'à montrer que $\cap_j K_j \subset K$

Si $x \in K_j$ pour tout j, alors d(x,K)   1/2^j pour tout j. D'où, $d(x, K) = 0$, comme K est compact alors il est fermé et donc $x \in K$

Conclusion : $K_j \searrow K$

Etape 2 : Montrons que $\lambda(K_j) \to \lambda(K)$

$K_1 \subset R^n$, or R^n est un espace vectoriel de dimension finie, de plus K_1 est fermé et borné, donc il est compact.

Comme K_1 est compact et que $\lambda(K_1) < \infty$, d'après le théorème de la suite décroissante, $\lambda(K_j) \to \lambda(K)$ quand $j \to \infty$

Etape 3 : On fixe un j tel que $\lambda(K_j) < \lambda(K) + \varepsilon$.

Soit l tel que $l\sqrt(n) \leq 1/2^j$ et soit F la collection des cubes de la forme $[a_1, a_1 + l[$ x ... x $[a_n, a_n + l[$

Soit $\mathfrak{G} = \{Q \in F; Q \cap K \neq \emptyset\}$

$\mathfrak{G}$ est finie et $K \subset \mathfrak{G}$. De plus, par construction les cubes sont disjoints.

Pour tout $Q \in \mathfrak{G}$ Pour tout $y \in Q, d(y, K) < l\sqrt{n} \leq 1/2^j$ d'où $\cup_{Q \in \mathfrak{G}} Q \subset K_j$

Ainsi, $\lambda_n(\cup_{Q \in \mathfrak{G}} Q \quad K) \leq \lambda_n(K_j \quad K) < \varepsilon$

Conclusion : Les cubes vérifient les 3 propriétés.

2) Soit $B \subset \mathbf{R}^n$ un borélien de mesure finie.
On sait à l'aide de la question 1 qu'il existe un entier k et $D_1, ..., D_k$ des cubes rationnels tels que :
$\mu(\cup D_j \setminus K) < \epsilon_2$ avec $K \subset B$ un compact tel que $\mu(B \setminus K) < \epsilon_1$ (et ϵ_1 et ϵ_2 que l'on déterminera plus tard)
On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu(B) - \mu(K) & < & \epsilon_1 \\ \sum_{j=1}^k \mu(D_j) - \mu(K) & < & \epsilon_2 \end{array} \right.$$

Avec la première ligne, on a donc :

$\|\chi_B - \chi_K\|_p = (\int_{\mathbf{R}^n} |\chi_B(x) - \chi_K(x)|^p \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbf{R}^n} |\chi_{B\setminus K}(x)|^p \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbf{R}^n} |\chi_{B\setminus K}(x)| \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$
car χ est soit nulle soit égale à 1 donc la puissance p ne change pas le résultat.

Alors :
$\|\chi_B - \chi_K\|_p = \mu(B \setminus K)^{\frac{1}{p}} < \epsilon_1^{\frac{1}{p}}$

De la même manière, avec la deuxième ligne, on obtient :

$\| \sum_{j=1}^k \chi_{D_j} - \chi_K\|_p = (\int_{\mathbf{R}^n} | \sum_{j=1}^{k} \chi_{D_j}(x) - \chi_K(x)|^p \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbf{R}^n} |\chi_{\cup D_j \setminus K}(x)|^p \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}} = (\int_{\mathbf{R}^n} |\chi_{\cup D_j \setminus K}(x)| \, \mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$
car χ est soit nulle soit égale à 1 donc la puissance p ne change pas le résultat.

Alors :
$\| \sum_{j=1}^k \chi_{D_j} - \chi_K\|_p = \mu(\cup D_j \setminus K)^{\frac{1}{p}} < \epsilon_2^{\frac{1}{p}}$

Avec l'inégalité triangulaire, on a finalement :
$\|\chi_B - \sum_{j=1}^k \chi_{D_j}\|_p \leq \|\chi_B - \chi_K\|_p + \|\chi_K - \sum_{j=1}^k \chi_{D_j}\|_p < \epsilon_1^{\frac{1}{p}} + \epsilon_2^{\frac{1}{p}}$

En choisissant donc ϵ_1 et ϵ_2 tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1^{\frac{1}{p}} = \frac{\epsilon}{2} \\ \epsilon_2^{\frac{1}{p}} = \frac{\epsilon}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_1 = (\frac{\epsilon}{2})^p \\ \epsilon_2 = (\frac{\epsilon}{2})^p \end{array} \right.$$

On a bien montré que $\|\chi_B - \sum_{j=1}^k \chi_{D_j}\|_p < \epsilon$

3) On a E=$\{\sum_{finie} \lambda_j \chi_{D_j}, \lambda_j \in Q, D_j \text{cubes rationnels}\}$ est au plus dénombrable.

On veut montrer que E est dense dans L^p .
Montrons que $\overline{E} = \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$
On a $\{\chi_B, B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \mu(B) < +\infty\} \subset \overline{E}$

Soit $U = \{ u = \sum_{j=1}^k \lambda_j \chi_{B_j},\ B_j \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n), \lambda_j \in \mathbf{R}\ , \mu(B_j) < +\infty\}$, montrons que $U \subset \overline{E}$ pour tout k.
Soit $\epsilon > 0, \exists u_j \in E$ tel que $\|u_j - u\|_p < \epsilon_1$, pour tout j.
De plus, $\exists r_j \in Q$ tel que $|r_j - \lambda_j| < \epsilon_2$ pour tout j (et $|r_j| \leq |\lambda_j|$).
On a donc : $\| \sum_{j=1}^k r_j u_j - u\|_p = \| \sum_{j=1}^k (r_j u_j - \lambda_j \chi_{B_j})\|_p$
Alors : $\| \sum_{j=1}^k r_j u_j - u\|_p = \| \sum_{j=1}^k r_j (u_j - \chi_{B_j}) + \sum_{j=1}^k (r_j - \lambda_j)\chi_{B_j}\|_p$
$\| \sum_{j=1}^k r_j u_j - u\|_p \leq \sum_{j=1}^k |r_j| \|u_j - \chi_{B_j}\|_p + \sum_{j=1}^k |r_j - \lambda_j| \|\chi_{B_j}\|_p$
$\| \sum_{j=1}^k r_j u_j - u\|_p < k \times max|\lambda_j| \times \epsilon_1 + k \times \epsilon_2 \times max\|\chi_{B_j}\|_p$.

On choisit ensuite ϵ_1 et ϵ_2 pour qu'on trouve $\| \sum_{j=1}^k r_j u_j - u\|_p < \epsilon$
On pose donc $\epsilon_1 = \epsilon/(2k \times max|\lambda_j|)$ et $\epsilon_2 = \epsilon/(2k \times max\|\chi_{B_j}\|_p)$
Or, $\sum_{j=1}^k r_j u_j \in$ E donc u $\in \overline{E}$: $U \subset \overline{E}$.

On remarque d'après la définition de E que $\overline{E} \subset \mathcal{L}^p$.
Finalement, on veut montrer que $\mathcal{L}^p \subset \overline{E}$, pour $1 \leq p < +\infty$.
On va utiliser la propriété suivante :
$\forall f \in \mathcal{L}^p, \forall \epsilon > 0, \exists g \in \mathcal{L}^p$ étagée telle que $\|f - g\|_p < \epsilon$.
Preuve : Soit f$\in \mathcal{L}^p$, il existe $(f_j)_j$ une suite de fonctions étagées telles que $f_j \to f$ simplement. On a donc $|f_j| \leq |f|$ pour tout j. Cela implique que $f_j \in \mathcal{L}^p$ car $f \in \mathcal{L}^p$ et, par convergence dominée, $f_j \to f$ dans $\mathcal{L}^p$, ce qui montre la propriété ci-dessus.

Soit $f \in \mathcal{L}^p$, avec la propriété ci-dessus, on peut trouver B tel que $\|f - \chi_B\|_p < \epsilon$ et d'après la question 2, il existe u $= \sum_{j=1}^k \chi_{D_j}$ telle que $\|\chi_B - u\|_p < \epsilon$. On a donc $\|f - u\| \leq \|f - \chi_B\|_p + \|\chi_B - u\|_p < 2\epsilon$.
Or, u $\in$ U $\subset \overline{E}$ donc f$\in \overline{E}$.

Finalement, E est dense dans L^p. Donc (L^p, $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$,$\mu$) est séparable.