Préparation à l'Agrégation 2013-2014
Préparation à l'Ecrit d'Analyse

Ergodicité

- corrigé partiel -

$\boxed{\text{Exo 6 d)}}$ Comme nous l'avons vu, il faut montrer la (en fait : il suffit de) convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \sum_{1\leq k<l\leq n} |X_{k,l}|, \text{ où}$$

$$X_{k,l} := \int_a^b \underbrace{\cos 2m\pi(x^l - x^k)}_{\Phi(x) = \Phi_{k,l}(x)} dx, \text{ avec } m \in \mathbb{N}^*,$$

$1 < a < b < \infty$.

Notons que $\left.\begin{matrix} x>1 \\ l>k\geq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Phi'(x) > 0$ et $\Phi''(x) > 0$ (vérifier !)

<u>Lemme.</u> Soit $\Phi \in C^2([a,b])$ tq $\Phi'(x) > 0$ et $\Phi''(x) > 0$. Alors

$$\left| \int_a^b \cos \Phi(x)\, dx \right| \leq \frac{2}{\Phi'(a)}.$$

<u>Preuve :</u> On a $\cos \Phi(x) = \frac{1}{\Phi'(x)} (\sin \Phi)'(x)$, d'où

$$\left|\int_a^b \cos \Phi(x)\, dx\right| = \left| \left[\frac{1}{\Phi'(x)} \sin \Phi(x)\right]_a^b + \int_a^b \frac{\Phi''(x)}{\Phi'^2(x)} \sin \Phi(x)\, dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{\Phi'(a)} + \frac{1}{\Phi'(b)} + \int_a^b \underbrace{\frac{\Phi''(x)}{\Phi'^2(x)}}_{-\left(\frac{1}{\Phi'}\right)'(x)} dx = \frac{2}{\Phi'(a)}. \qquad \square$$

Le lemme donne

$$S := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \sum_{1\leq k<l\leq n} |X_{k,l}| \leq \frac{1}{m\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \sum_{1\leq k<l\leq n} \frac{1}{la^{l-1}-ka^{k-1}}$$

Si $1 \leq k < l$, alors

$$la^{l-1} - ka^{k-1} \geq la^{l-1} - (l-1)a^{l-1} = a^{l-1},$$ et donc

$$\sum_{1\leq k<l} \frac{1}{la^{l-1}-ka^{k-1}} \leq \sum_{1\leq k<l} \frac{1}{a^{l-1}} = \frac{l-1}{a^{l-1}}.$$

Nous obtenons

$$S \leq \frac{1}{m\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} \underbrace{\sum_{2\leq l\leq n} \frac{l-1}{a^{l-1}}}_{\leq T := \sum_{l\geq 2} \frac{l-1}{a^{l-1}} < \infty} \leq C \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} < \infty. \quad \square$$

(car $a > 1$; on utilise le critère du quotient)