

NOM, prénom :

Numéro d'étudiant :

Groupe de TD ou nom du chargé de TD :

Question de cours (2 p.)

Enoncer le théorème de Rolle.

Exercice 1. (4 p.) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x > 0 \\ ax + b, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Trouver les valeurs de a et b telles que f soit :

(i) (2 p.) Continue sur \mathbb{R} .

(ii) (2 p.) Dérivable sur \mathbb{R} .

Justifier la réponse.

Exercice 2. (2 p.) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Si $f(0) = 0$, $f(2) = 0$, et $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, calculer $f(1)$.

Exercice 3. (3 p.) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sin x)$.

Exercice 4. (9 p.) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$. On se propose d'étudier les solutions de l'équation (E) $x = f(x)$.

(i) (1 p.) On suppose $x > \frac{1}{2}$. Montrer que x ne vérifie pas (E). Et si $x < -\frac{1}{2}$?

(ii) (2 p.) Montrer que (E) a au moins une solution x_0 dans l'intervalle $[-1/2, 1/2]$.

(iii) (2 p.) Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

(iv) (2 p.) En déduire que f a exactement une solution $x_0 \in \mathbb{R}$.

(v) (2 p.) On considère un $y_0 \in \mathbb{R}$ arbitraire, et on définit par récurrence sur n la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ par la formule $y_{n+1} = f(y_n)$. Montrer que $|y_n - x_0| \leq \frac{1}{2^n}|y_0 - x_0|$, $\forall n \in \mathbb{N}$, puis que $y_n \rightarrow x_0$. [Indication : on a $x_0 = f(x_0)$.]

Rappeller, svp :
NOM, prénom :
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD ou nom du chargé de TD :